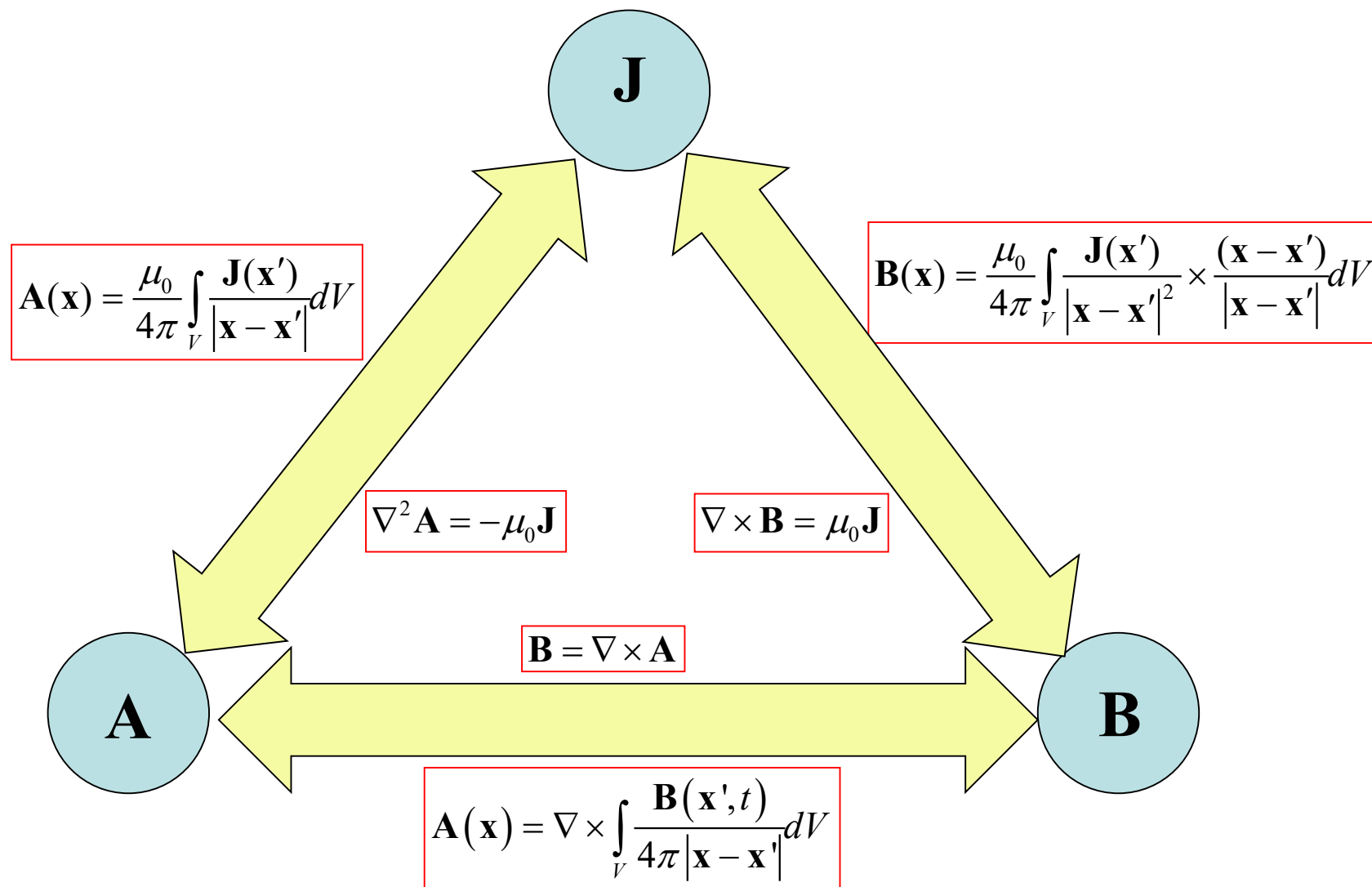


Semaine 7:
Magnétostatique 1

Résumé de la magnétostatique



Electrostatique et Magnétostatique:

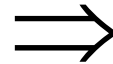
Définition

Définition de la condition électrostatique/magnétostatique

La densité de charge ρ est indépendante du temps.

La densité de courant $\mathbf{J}$ est indépendante du temps.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \forall t$$



Electrostatique:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{E} &= -\nabla V \\ V(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV \end{aligned}$$

Magnétostatique:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV \end{aligned}$$

Note:

Conservation de la charge: $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

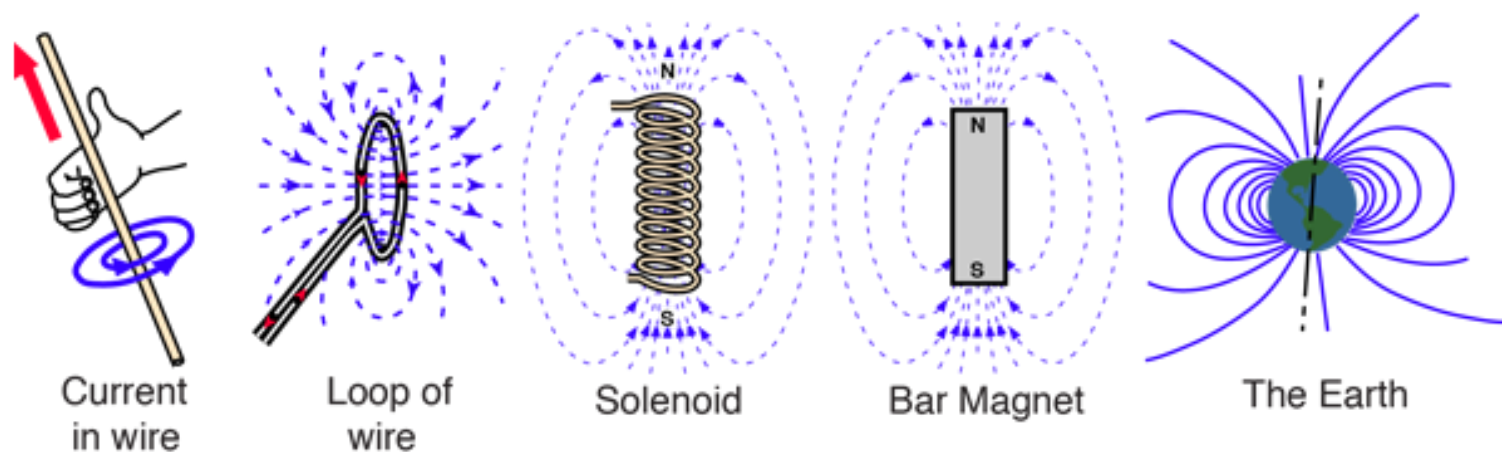
En regime "statique": $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$

$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

Sources du champ magnétique

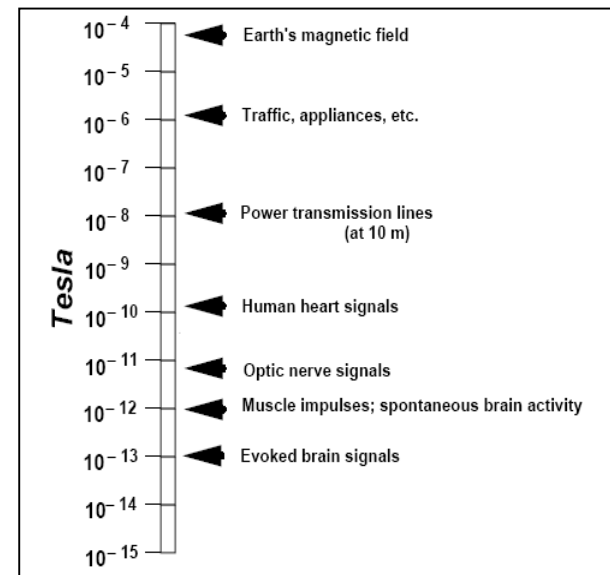
Mouvement des charges électrique
Moments magnétiques intrinsèques des particules (électrons, protons, neutrons ...)



Bobines avec courant:
< 100 T typ.

Aimant permanent:
< 10 T typ.

Terre (sur la surface):
~ 0.1 mT



Sources de champs
«faible» (< 0.1 mT)

Une distribution de **charges électriques statiques** produit un **champ électrique statique**.

Une distribution de **courants électriques stationnaires** produit un **champ magnétique statique**.

Loi de Biot-Savart:

Le champ magnétique produit par un courant stationnaire

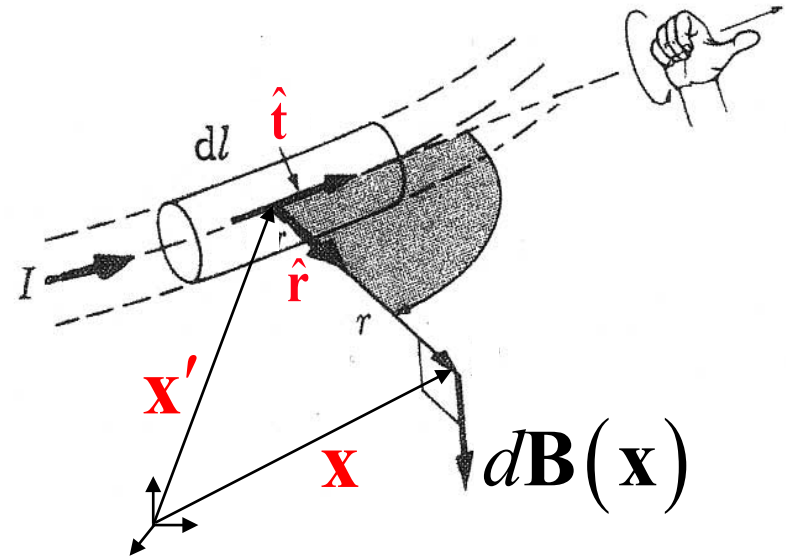
Loi de Biot-Savart

$$d\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV$$

Champ $\mathbf{B}$ produit par les courants dans un élément infinitésimal de volume dV

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV$$

Champ $\mathbf{B}$ produit par les courants dans le volume V



Note: G 224: Une charge ponctuelle mobile ne produit pas un courant constant. Cela signifie qu'une charge ponctuelle ne produit pas un champ statique. Nous sommes obligés de faire face à des distributions de courants étendues.

Note 1: «Démonstration» de la loi de Biot-Savart à partir du potentiel vecteur $\mathbf{A}$:

En condition statiques: $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV$$

Math.: $\nabla \times (f\mathbf{V}) = f(\nabla \times \mathbf{V}) + \nabla f \times \mathbf{V}$

$\Rightarrow$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) (\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) + \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')$$

mais :

Le "curl" est par rapport à la coordonnée $\mathbf{x}$ et

$\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ est une constante par rapport à $\mathbf{x}$.

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0$$

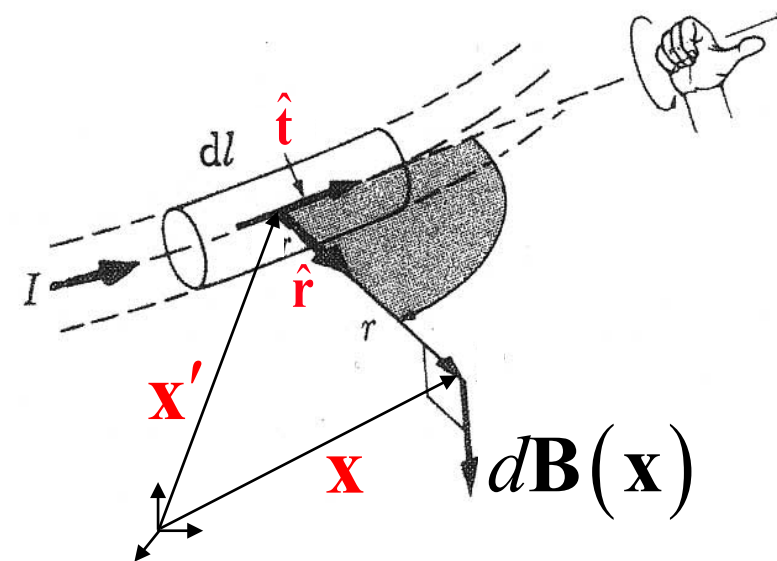
$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$(\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'; \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r})$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV$$

$$d\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV$$

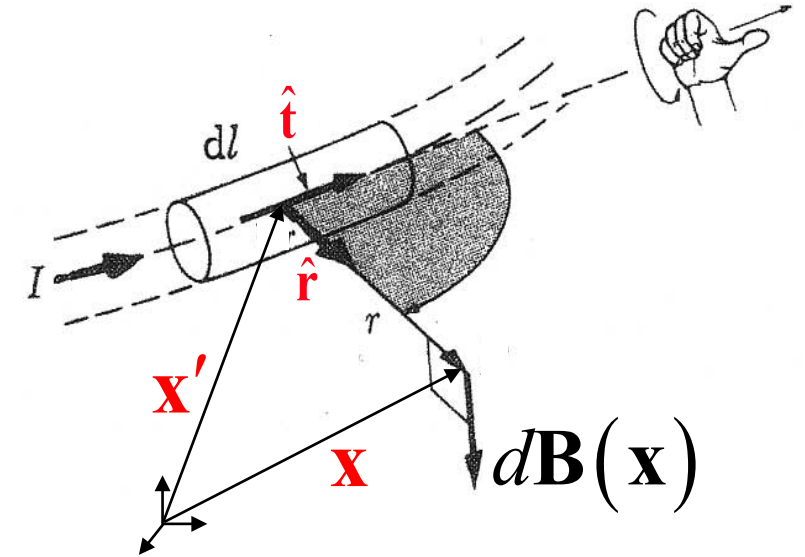


Note 2:

Equations équivalentes

$$d\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV ; \quad \mathbf{J} = \frac{I}{S} \hat{\mathbf{t}} ; \quad dV = S dl$$

$$\Rightarrow d\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{r}}$$



Note 3:

Analogie champ électrostatique/champ magnétostatique

$$d\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{with } dV \xrightarrow{dq}$$

$$d\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}') \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' ; \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Note 4:

Champ magnétique créé par un circuit fermé avec courant I

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl$$

Loi d'Ampère

Equation de (Maxwell)-Ampère: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$

Conditions statiques: $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

En magnétostatique, la **loi d'Ampère** permet de déterminer la valeur du champ magnétique grâce à la donnée des courants électriques.

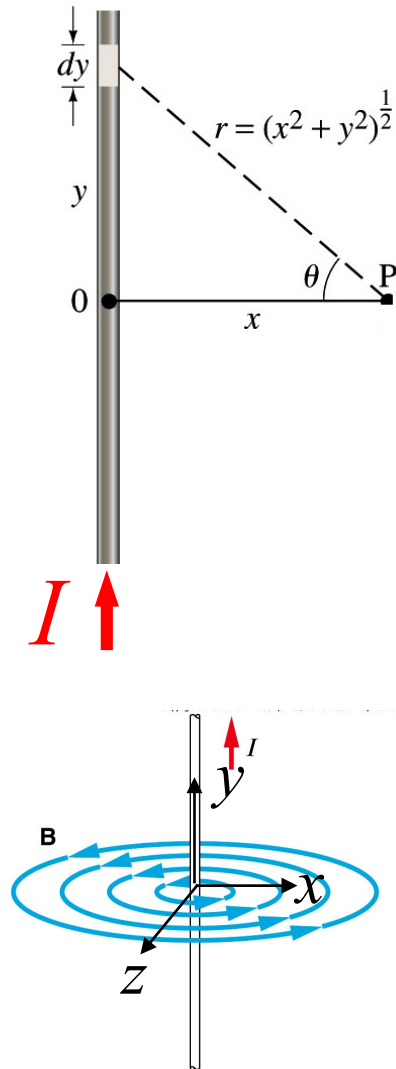
Cette loi constitue l'équivalent magnétostatique de la loi de Gauss.

Pour être appliqué analytiquement de manière simple, la loi d'Ampère nécessite que le problème envisagé soit de symétrie «élevée»

(comme dans le cas de la loi de Gauss pour le champ électrique).

Exercice: Courant dans un fil conducteur rectiligne infini

a. «Calcule» avec la loi de Biot-Savart infinitésimale



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow d\mathbf{B}(x, y, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idy}{(x^2 + y^2)} \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{r}}$$

$\Rightarrow$

$$y = x \tan \theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} x \tan \theta = x \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow dy = x \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = x(1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

$\Rightarrow$

$$d\mathbf{B}(x, y, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idy}{(x^2 + y^2)} \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{r}} =$$

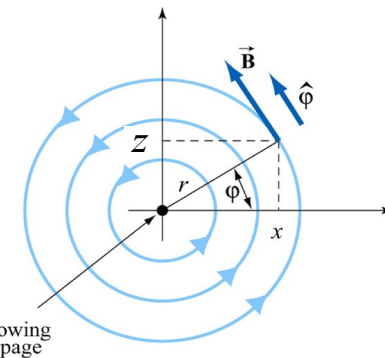
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{x^2 (1 + \tan^2 \theta)} x(1 + \tan^2 \theta) \cos \theta d\theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{x} \cos \theta d\theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{B}(x, y, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{x} \hat{\boldsymbol{\phi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\sqrt{x^2 + z^2}} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$



b. «Calcule» avec la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampere (loi d'Ampere)

Equation de Maxwell (loi d'Ampere): $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$

Conditions statiques: $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$

La symétrie du problème
permet de déterminer «intuitivement»
la direction du champ $\mathbf{B}$

Symétrie cylindrique: $\mathbf{B} = B\hat{\phi}$

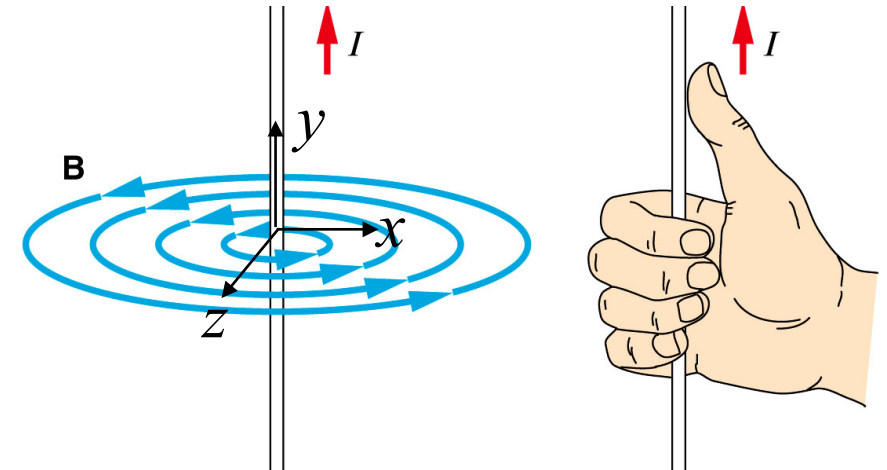
Courant dans le fil: $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = I$

$\Rightarrow \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$

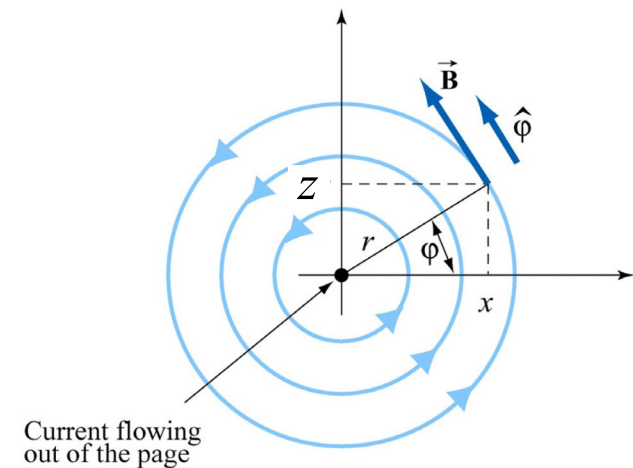
Symétrie cylindrique: $\mathbf{B} = B\hat{\phi}$

$\Rightarrow \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B$

$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



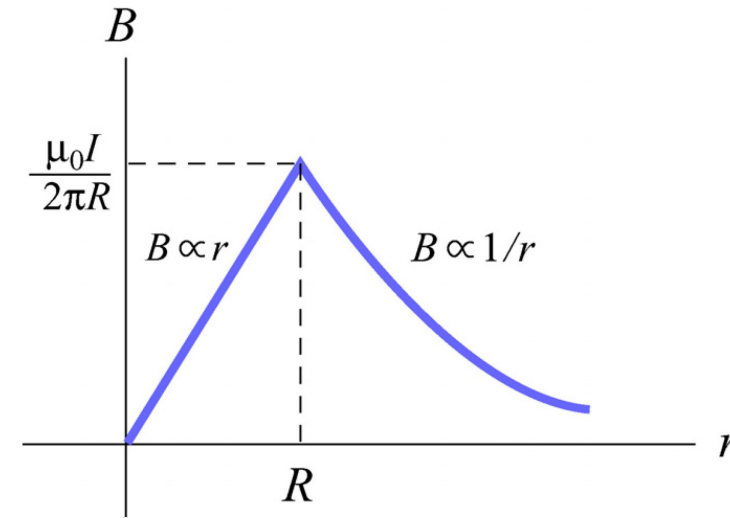
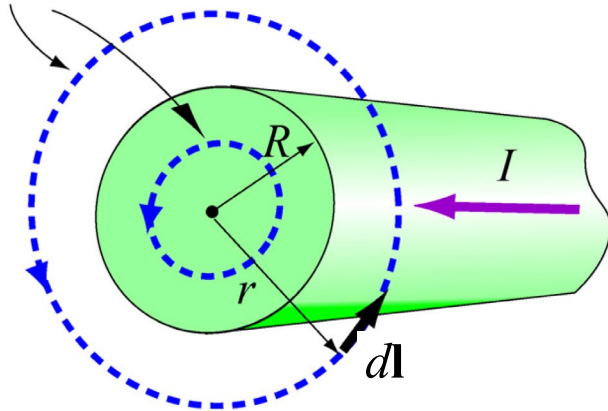
$$r = \sqrt{x^2 + z^2}$$



Exercice: Champ à l'intérieur d'un fil rectiligne infini

«Calcule» avec la forme intégrale de l'équation de Maxwell (loi d'Ampere)

Amperian loops



Equation de Maxwell (loi d'Ampere): $\oint_{C(r)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{S(r)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \mu_0 \epsilon_0 \int_{S(r)} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$ Conditions statiques: $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$

Symétrie cylindrique: $\mathbf{B} = B\hat{\phi}$

La symétrie du problème
permet de déterminer «intuitivement»
la direction du champ $\mathbf{B}$

Pour $r \leq R$: $\int_{S(r)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S(r)} \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I \frac{r^2}{R^2}$

$$\Rightarrow \oint_{C(r)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

$$\oint_{C(r)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2} \quad (\text{pour } r \leq R)$$

Champ magnétique créé par plusieurs courants

Equation de Maxwell (loi d'Ampere): $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$

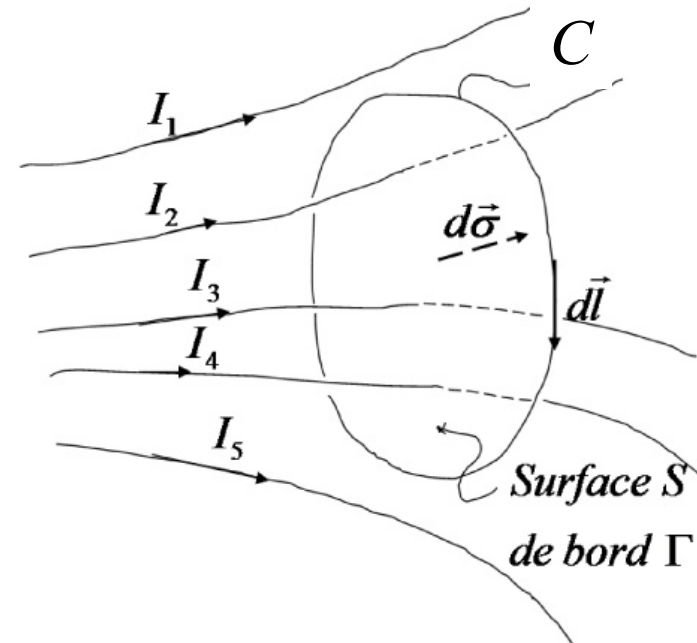
Conditions statiques: $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$

$$\mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \sum_i I_i$$

$\Rightarrow$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

superposition



Exercice: Champ magnétique produit par un courant dans une bobine planaire avec une seule spire

«Calcule» avec la loi de Biot-Savart

Circuit fermée

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl$$

Pas de solution analytique (seulement solution numérique).

Solution analytique pour $\mathbf{B}(0,0,z)$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad dB_z = dB \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \theta$$

$$r \sin \theta = R \quad \text{et} \quad r = \sqrt{z^2 + R^2} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$\Rightarrow$

$$dB_z = dB \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IdlR}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

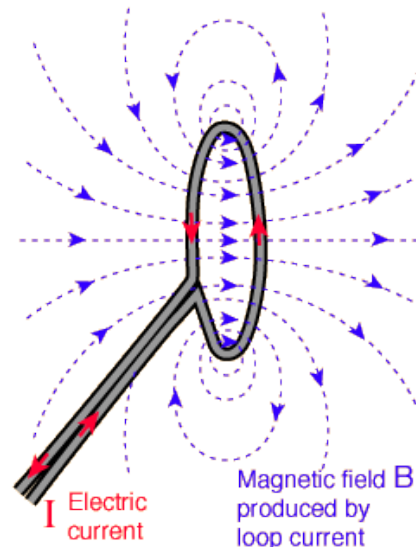
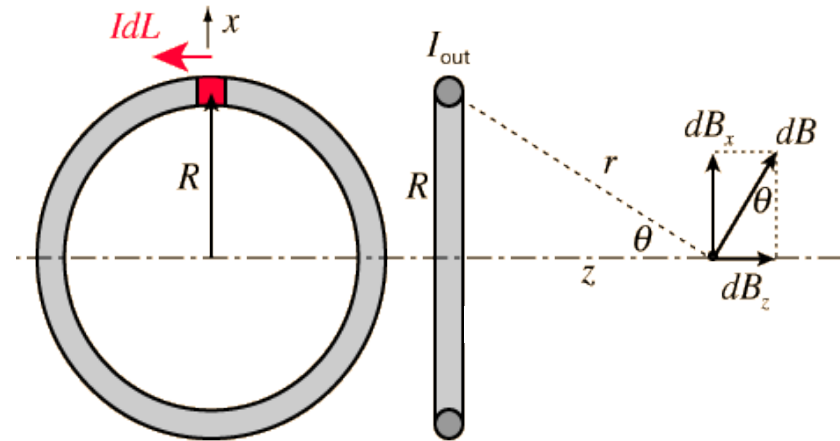
$\Rightarrow$

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \hat{\mathbf{z}} \int_0^{2\pi R} dB_z = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B}(0,0,0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{\mathbf{z}}$$

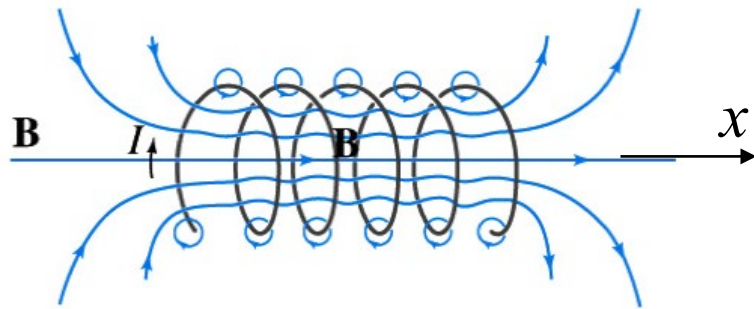


Notes:

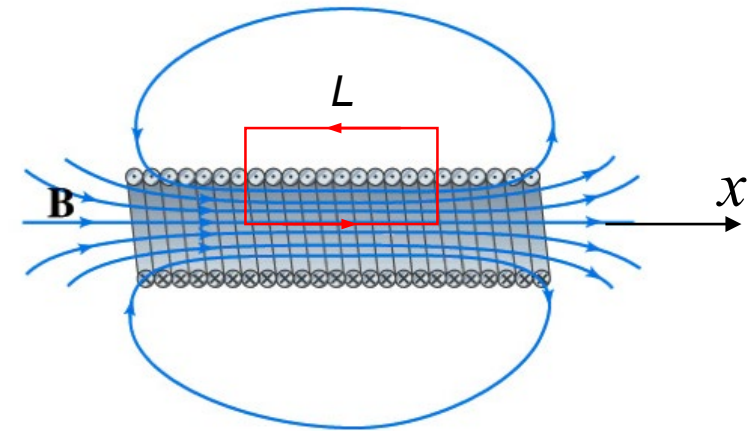
- 1) La symétrie du problème n'est pas suffisante pour pouvoir utiliser la loi d'Ampère pour obtenir le champ magnétique (la loi d'Ampère est valable mais pour ce problème elle est "inutile")
- 2) Une expression analytique du champ ne peut être trouvée que le long de l'axe de la bobine.

Exercice: Champ magnétique dans un long solénoïde vide

«Calcule» avec la forme intégrale de l'équation de Maxwell (loi d'Ampere)



(a)



(b)

Equation de Maxwell (loi d'Ampere): $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$

Conditions statiques: $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$

Pas de courant liés: $\mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s}$

$\Rightarrow$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s}$$

mais : $\mathbf{B} \cong 0$ à l'extérieur (loin des bords); $\mathbf{B} \cong B\hat{\mathbf{x}}$ à l'intérieur

$$\Rightarrow \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \cong BL + 0 + 0 + 0 = BL$$

et: $\mu_0 \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 InL$

$\Rightarrow$

$$B = \mu_0 In$$

La symétrie du problème
permet de déterminer «intuitivement»
la direction du champ $\mathbf{B}$

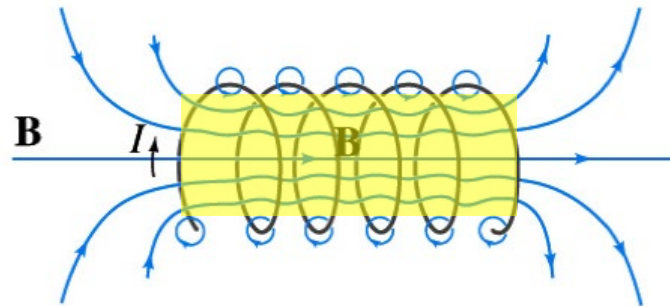
Pas facile à démontrer
rigoureusement

I : courant
 n : nombre de tours/m

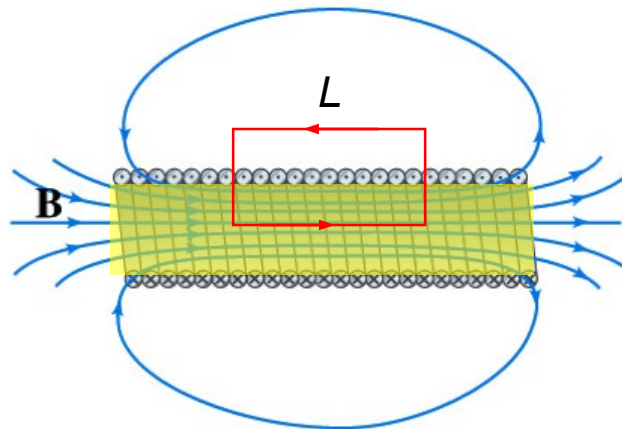
Exemple: $B = 1 \text{ T}$; $n = 10^3 / \text{m}$ $\Rightarrow I = \frac{B}{\mu_0 n} \cong 800 \text{ A}$

Exercice: Champ dans un long solénoïde avec matériau magnétique linéaire

«Calcule» avec la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampere (loi d'Ampere)



(a)



(b)

I : courant

n : nombre de tours par unité de longueur

μ : perméabilité magnétique

Equation de Maxwell : $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$

Condition statiques: $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$

Dans un matériau magnétique linéaire: $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$

$$\int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = InL$$

$\mathbf{B} \cong 0$ à l'extérieur (loin des bords); $\mathbf{B} \cong B\hat{x}$ à l'intérieur

$\Rightarrow$

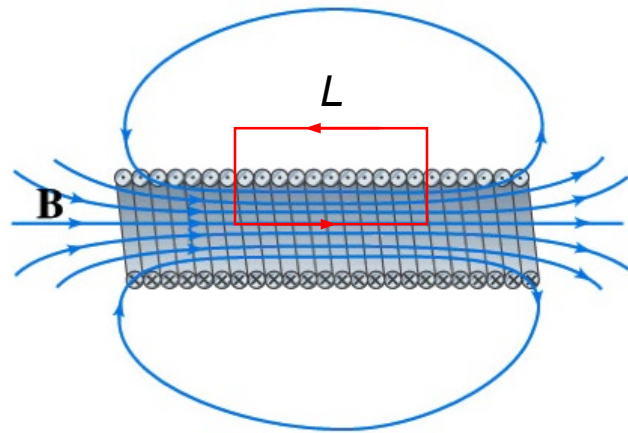
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mu_r \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mu_r \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \mu_r InL$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \cong BL + 0 + 0 + 0 = BL$$

$\Rightarrow$

$$B = \mu_0 \mu_r In$$

Solénoïde
vide

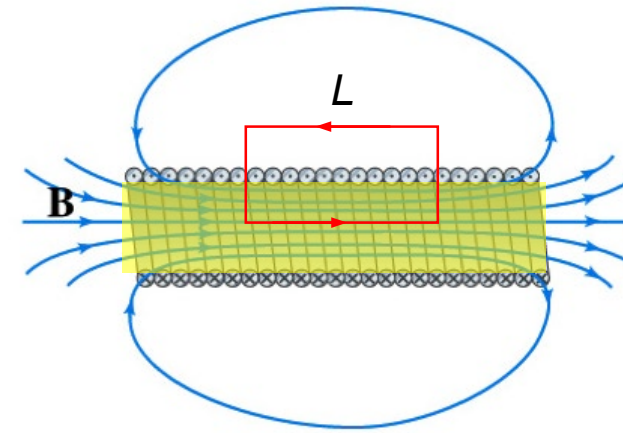


$$M = 0$$

$$H = nI$$

$$B = \mu_0 nI$$

Solénoïde
avec matériau magnétique linéaire



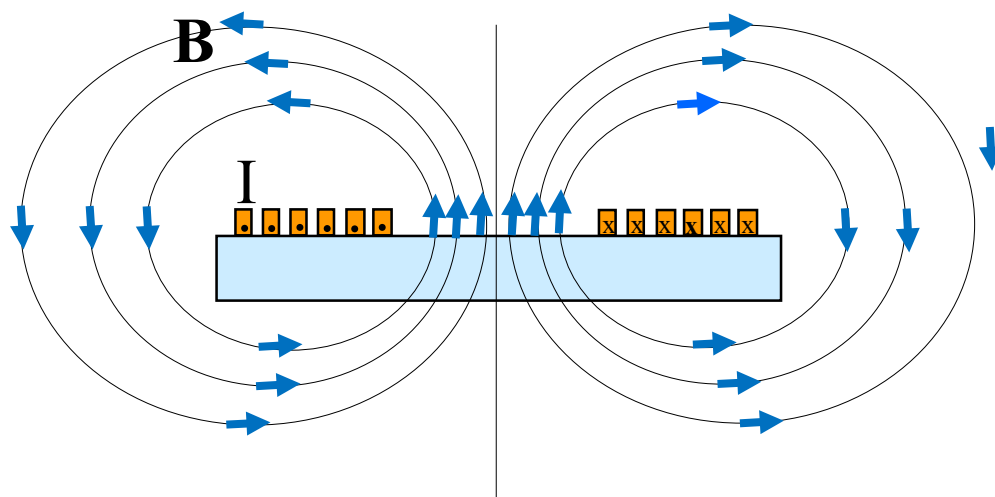
$$M = \chi H$$

$$H = nI$$

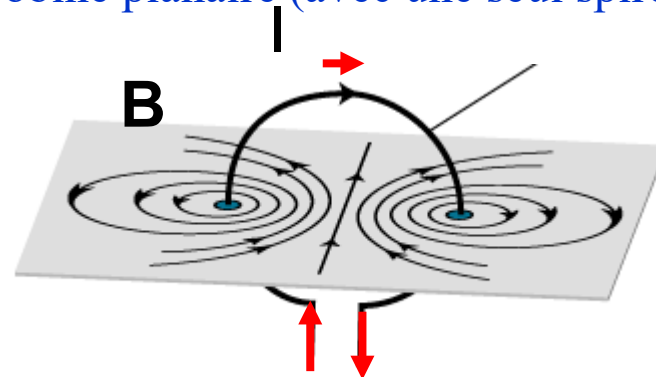
$$B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (1 + \chi) nI = \mu_0 \mu_r nI$$

Champ magnétique produit par différents «structures»

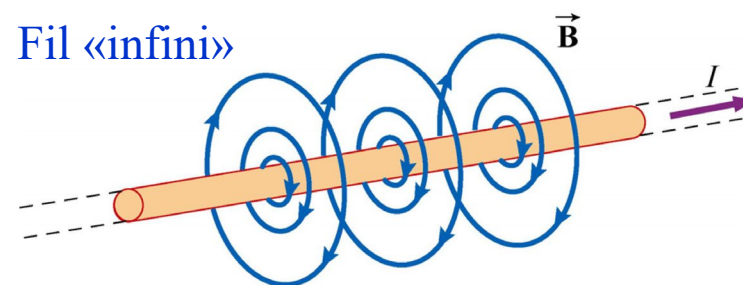
Bobine planaire (avec plusieurs spires)



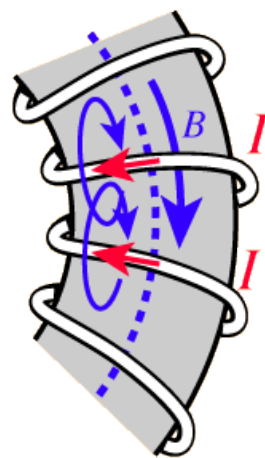
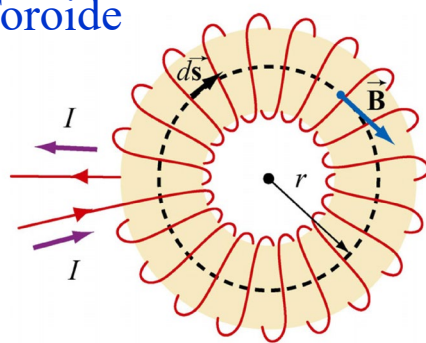
Bobine planaire (avec une seule spire)



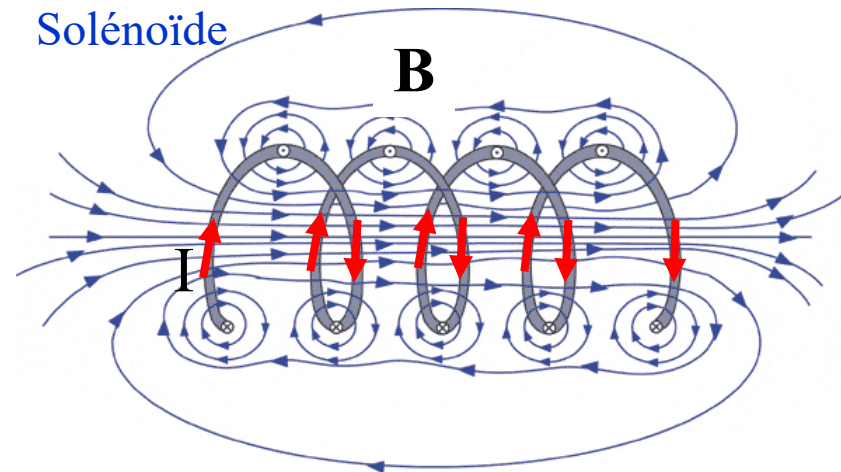
Fil «infini»



Toroïde



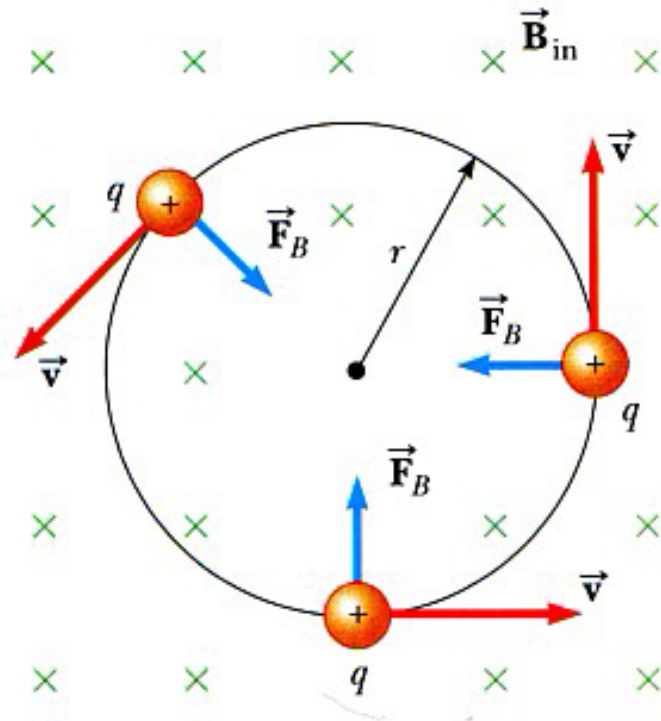
Solénoïde



Trajectoire d'une particule chargée dans un champ B

1. Champ B uniforme et vitesse $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$

Mouvement circulaire uniforme



$$\omega = \frac{q}{m} B$$

$$\mathbf{B} = -B \hat{\mathbf{e}}_z ; \quad \mathbf{v} = v \hat{\mathbf{e}}_\theta ;$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qvB \hat{\mathbf{e}}_r$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{a} = -\frac{qvB}{m} \hat{\mathbf{e}}_r \quad \text{et} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 r \hat{\mathbf{e}}_r \quad \text{et} \quad v = \omega r$$

$\Rightarrow$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Rayon de Larmor

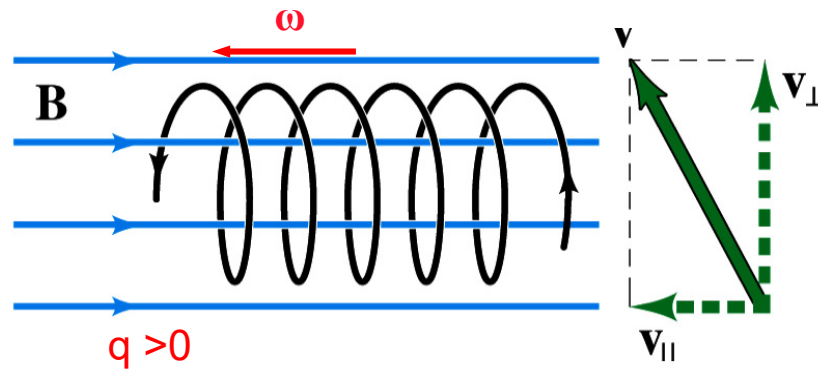
$$\omega = \frac{q}{m} B$$

Fréquence de cyclotron

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + r \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = -r\omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + r\omega \cos(\omega t) \hat{\mathbf{y}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = -r\omega^2 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} - r\omega^2 \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{a} &= -\omega^2 \mathbf{r} = \omega^2 r \hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned}$$

Note: pour des particules avec $q > 0$ et $q < 0$ le sens de rotation est opposé

2. Champ B uniforme et vitesse v arbitraire



Mouvement circulaire uniforme dans le plan perp. à **B**
et
vitesse constante dans la direction de **B**

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} ; \quad \mathbf{B} = B \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} ; \quad \mathbf{v} = v_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + v_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\parallel} = \text{const}$$

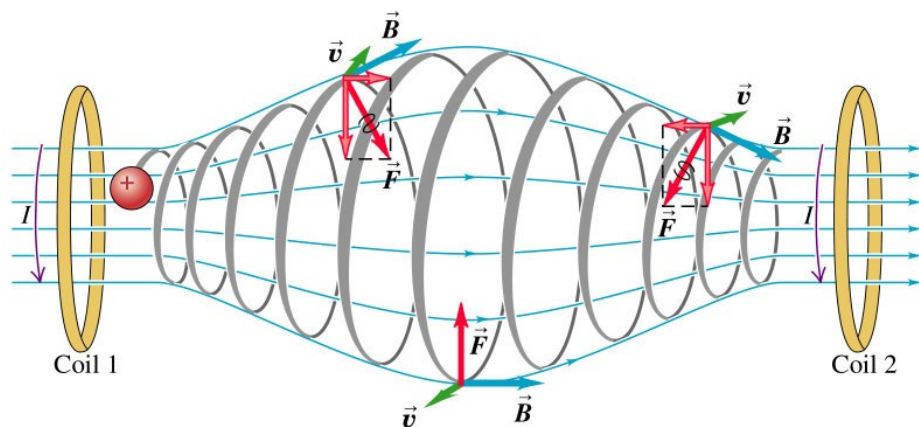
$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(v^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}| = \text{const}$$

$$v_{\perp}^2 = v^2 - v_{\parallel}^2 = \text{const} \Rightarrow v_{\perp} = \text{const}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\perp} \quad \text{et} \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{q}{m} \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{m} \mathbf{B}$$

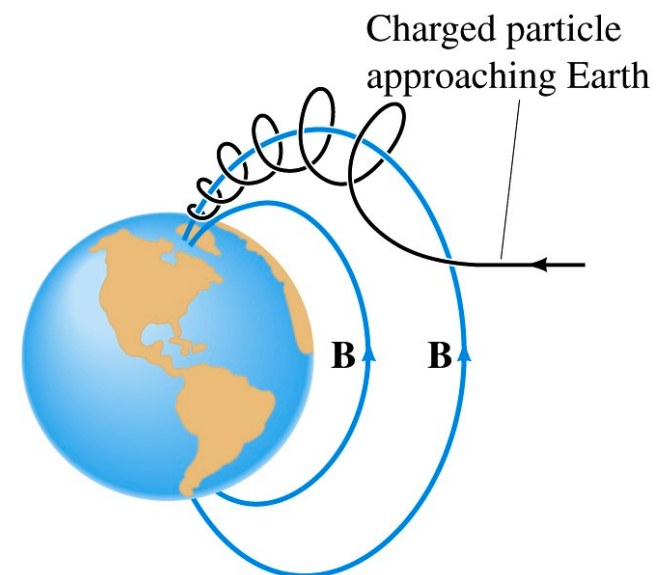
$$v_{\perp} = \omega r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

4. «Miroir» magnétique (Z 375)



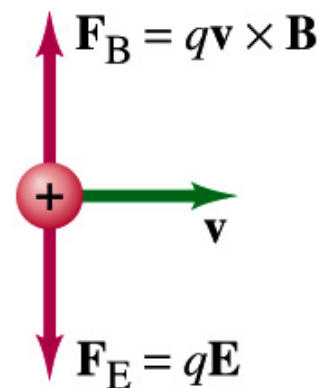
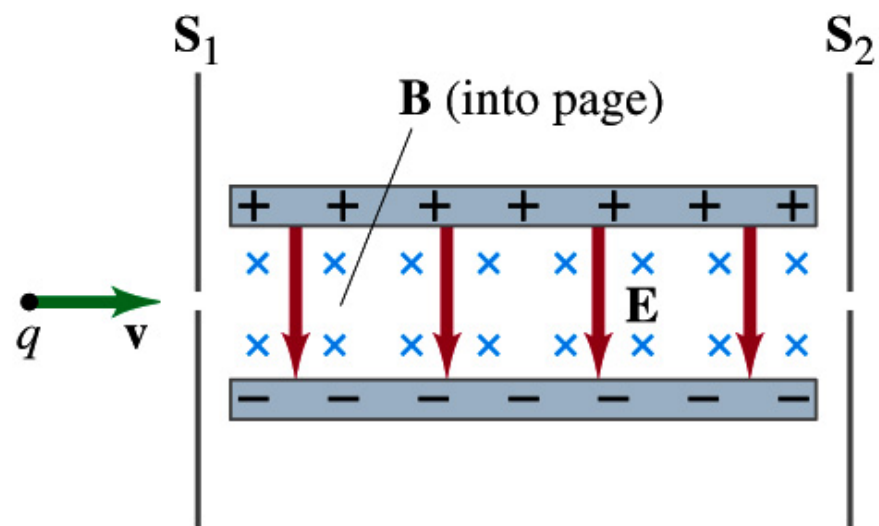
L'effet de miroir résulte de la tendance pour des particules chargées de rebondir en arrière depuis la région où le champ est fort (confinement magnétique).

5. Particules chargées qui se rapprochent de la Terre (Z 378)



Les électrons et les protons du soleil sont piégés par le champ magnétique terrestre. Une particule chargée spirale entre deux miroirs magnétiques près des pôles Nord et Sud. Ces particules entrent en collision avec les atomes et les molécules dans l'atmosphère. La désexcitation de ces atomes et molécules crée l'Aurore.

6. Sélecteur de vitesse



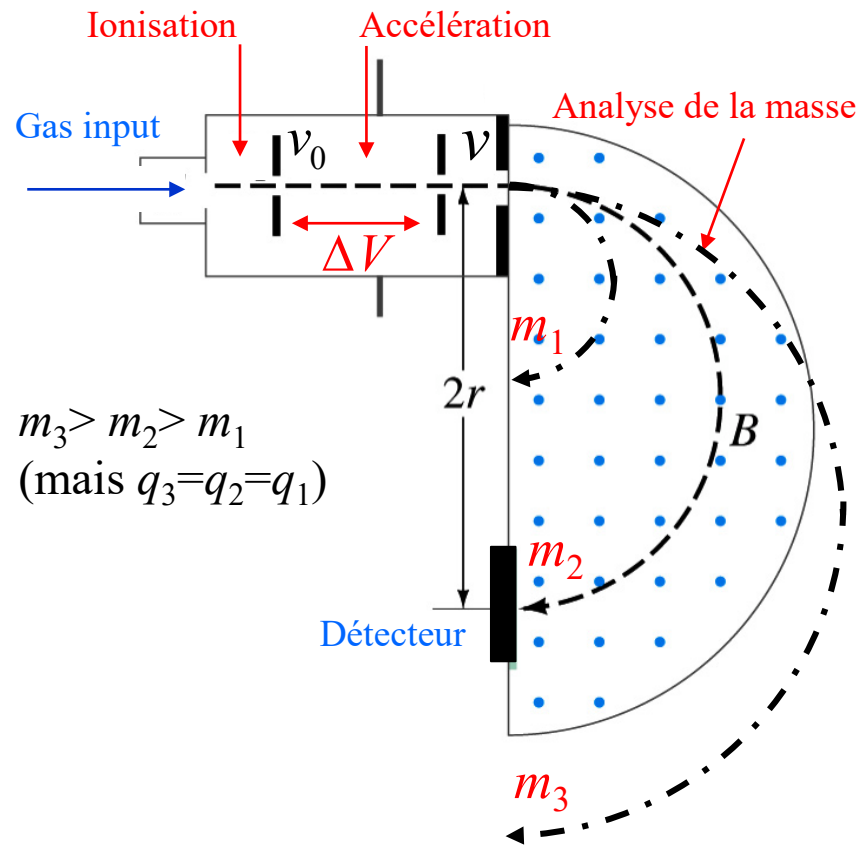
Pas de déviation $\Rightarrow$

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_E \Rightarrow qvB = qE \Rightarrow v = E / B$$

Les particules passant le trou central de S_2 (c'est-à-dire les particules "sélectionnées") ont une vitesse:

$$v = \frac{E}{B}$$

7. Spectromètre de masse



Ionisation:

atomes $\rightarrow$ ions
(par bombardement avec faisceau d'électrons)

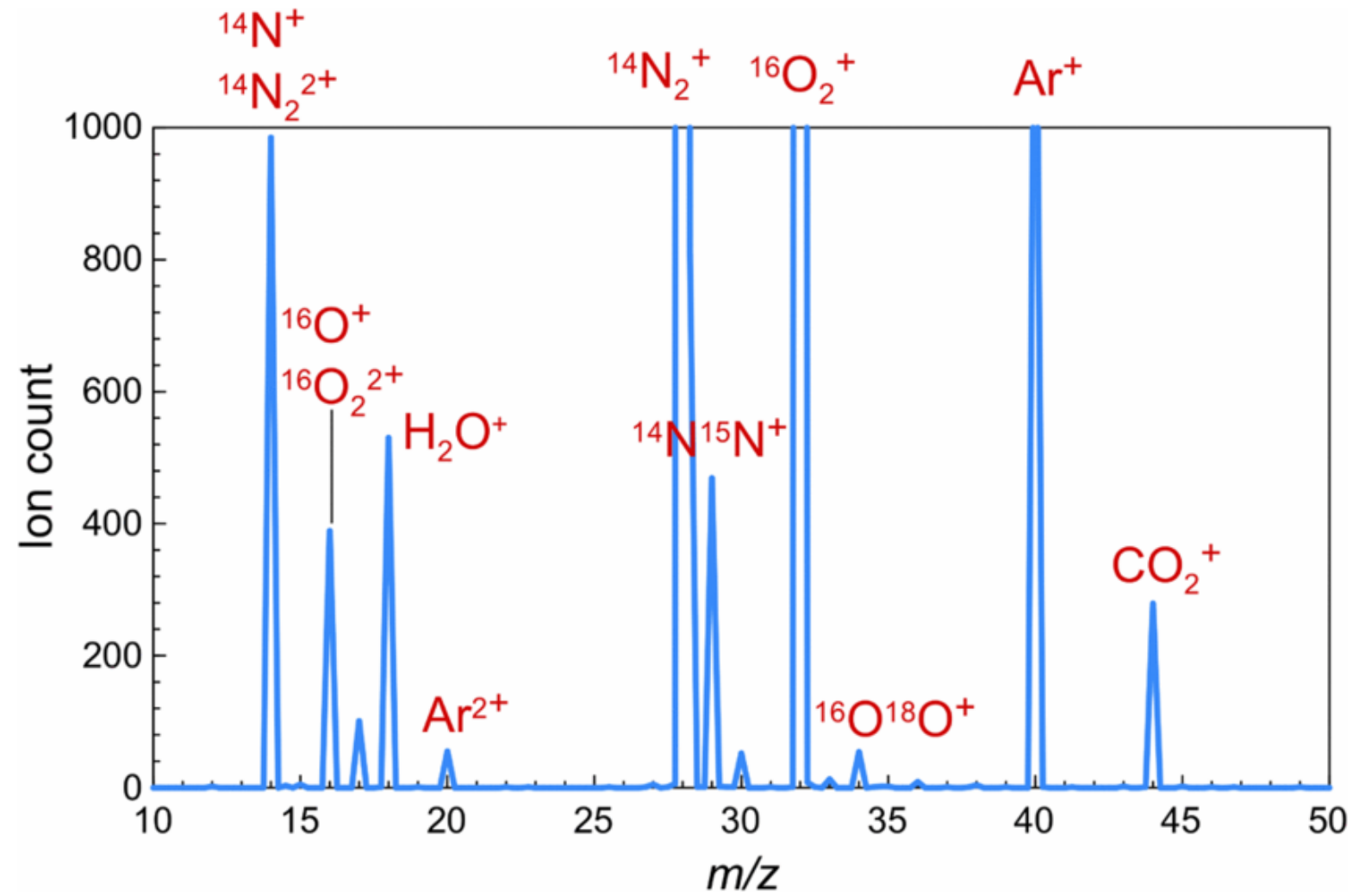
Accélération:

$$v_0 \cong 0; \quad \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V ;$$

Analyse de la masse:

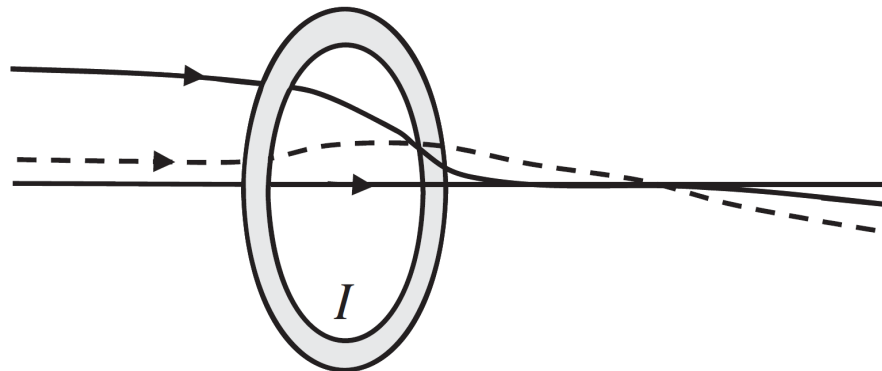
$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{1}{B} \left(\frac{2m}{q} \Delta V \right)^{1/2}$$

Spectre de masse de l'air



8. Lentille magnétique pour le microscope électronique (Z 358)

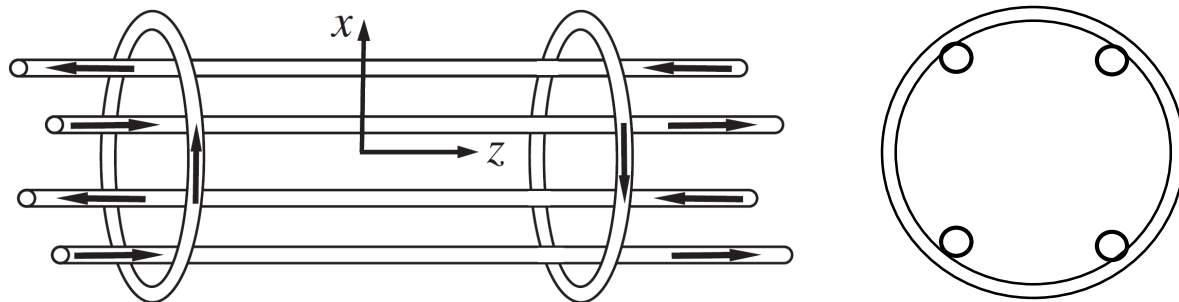
Les particules chargées (électrons) avec des trajectoires initialement parallèles (ou presque parallèles) sont focalisées par une boucle de courant circulaire.



9. Magnetic trapping (Piège magnétique) (Z 377)

Le piégeage au minimum local du champ magnétique se produit pour les atomes dont le moment angulaire total est anti-parallèle au champ magnétique local.

$$E_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$



Note:

1) le piège Ioffe-Pritchard est conçu pour piéger des particules **neutres** mais avec **moment magnétique non nulle**.

2) Il est impossible de produire un maximum local de la magnitude du champ magnétique dans l'espace libre. Cela signifie qu'il n'est pas possible de piéger une particule avec un moment magnétique parallèle au champ magnétique local.

Figure 12.9: The Ioffe-Pritchard configuration produces a minimum of $|\mathbf{B}(\mathbf{r})|$ at its center. Arrows indicate the direction of current flow in each wire.

Force et couple sur une distribution de courants dans un champ B

$$\mathbf{F} = \int_V (\rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) dV$$

$$\mathbf{N} = \int_V (\mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}))) dV$$

$\Rightarrow$

Pour $\rho(\mathbf{r})=0$ et/ou $\mathbf{E}(\mathbf{r})=0$:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV$$

$$\mathbf{N} = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) dV$$

Force magnétique sur un conducteur parcouru par un courant dans un champ $\mathbf{B}$

$$d\mathbf{l} = dl \hat{\mathbf{t}}$$

$$\mathbf{S} = S \hat{\mathbf{t}}$$

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v} = nqv \hat{\mathbf{t}}$$

$$\mathbf{J} = (I / S) \hat{\mathbf{t}}$$

n : densité des particules chargées “mobiles” (m^{-3})

q : charge de la particule “mobile” (C)

Force sur le volume dV :

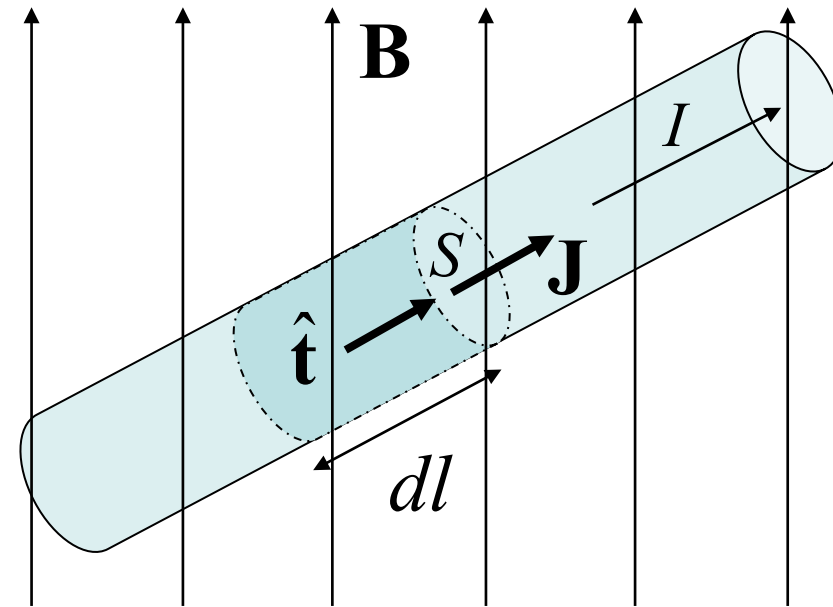
$$\sum_i (q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \sum_i q_i =$$

$$= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) nq dV = nq\mathbf{v} \times \mathbf{B} dV = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV = I \hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{B} dl$$

$\mathbf{f}$: Force par unité de volume

$\mathbf{F}$: Force totale sur le fil de longueur L

$$\mathbf{f} = nq\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV = I \int_L \hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{B} dl = I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

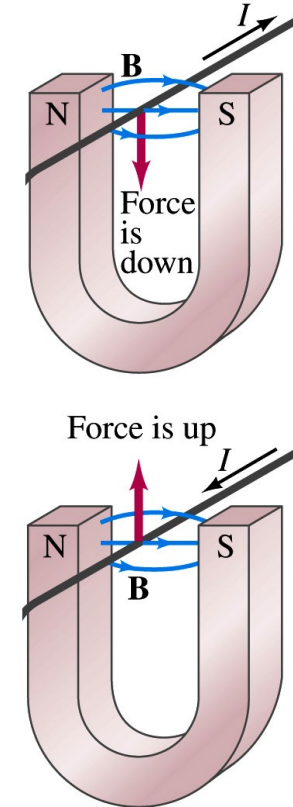
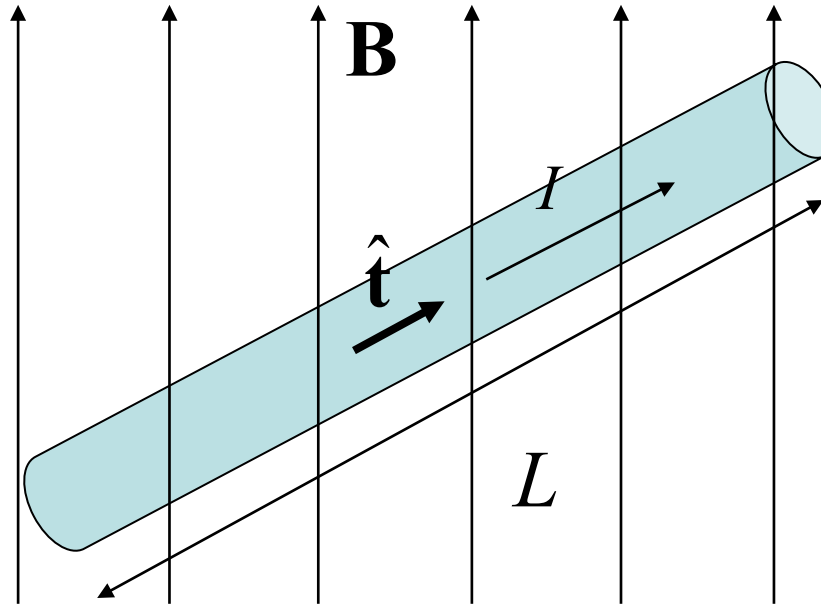


La force sur un conducteur est la force de Lorentz sur les charges électriques en mouvement.

Exemple 1.: Fil rectiligne de longueur L dans un champ $\mathbf{B}$ uniforme

$$\mathbf{F} = I \int_0^L d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{L} = L \hat{\mathbf{t}}$$



Exemple 2.: Circuit fermé (de forme quelconque) dans un champ $\mathbf{B}$ uniforme

$$\mathbf{F} = I \oint \hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{B} = -I \mathbf{B} \times \oint d\mathbf{l} = 0$$

La force résultante est nulle sur un circuit fermé de forme quelconque dans un champ $\mathbf{B}$ uniforme

Exemple 3: Force entre deux fils parallèles infinis

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad \mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\Rightarrow$$

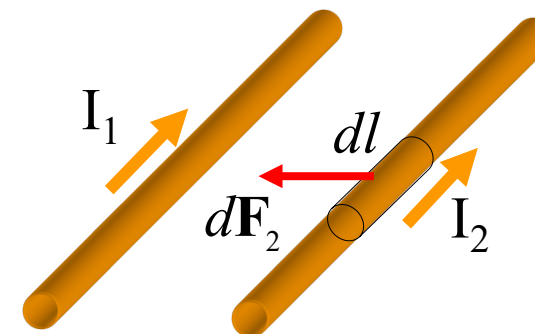
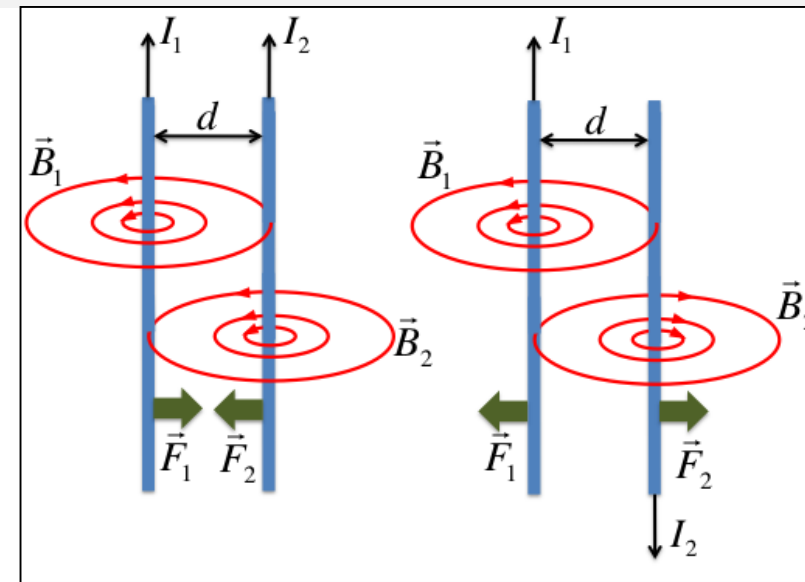
$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{\phi} \quad \mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow$$

$$d\mathbf{F}_1 = \left(\sum_{dl} q_i \right) \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2 = (nqSdl) \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2 = I_1 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl \hat{\mathbf{l}}$$

$$d\mathbf{F}_2 = \left(\sum_{dl} q_i \right) \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 = (nqSdl) \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 = I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl \hat{\mathbf{l}}$$

Forces sur les éléments dl



Forces totales sur les fils de longueur L

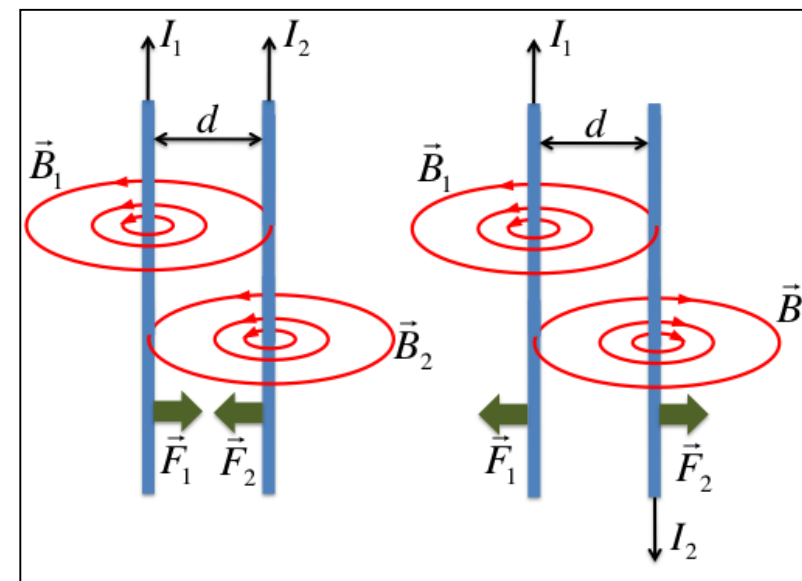
$$\mathbf{F}_1 \cong \int_0^L d\mathbf{F}_1 = \int_0^L \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl \hat{\mathbf{d}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} L \hat{\mathbf{d}}$$

$$\mathbf{F}_2 \cong \int_0^L d\mathbf{F}_2 = \int_0^L -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl \hat{\mathbf{d}} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} L \hat{\mathbf{d}}$$

Exemple:

$$I_1 = I_2 = 100 \text{ A} ; d = 1 \text{ cm} ; L = 1 \text{ m}$$

$$F = 0.2 \text{ N}$$



Note: expérience utilisée
pour définir l'Ampère [A]

Travail de la partie magnétique de la force de Lorentz

Note 1:

Particule chargée:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \Rightarrow dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt$$

$$\text{mais } (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{B} \quad \Rightarrow dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$$

$\Rightarrow$ La force magnétique "ne travaille pas" !

La particule chargée n'acquiert pas d'énergie cinétique en raison du champ magnétique.

Note 2:

Fil rectiligne en mouvement avec courant dans champ magnétique uniforme:

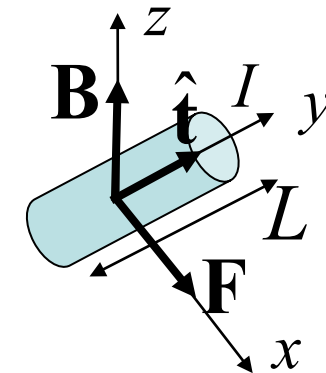
$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = IL(\hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{x} = ILBdx \neq 0 \Rightarrow P = d/dt(ILBdx) = ILBv$$

v : vitesse du fil dans la direction de la force.

Ce travail ne se fait pas par le champ magnétique mais

par le générateur qui produit le courant I contre la force électromotrice induite:

$$\varepsilon = BLv \text{ and } P = \varepsilon I = IBLv \quad (\text{voir plus tard dans le cours, partie "Electrodynamique"})$$



Energie électrostatique et énergie magnétostatique

Cas électrostatique:

l'énergie électrostatique totale U_E d'une distribution de charge isolée est le travail réversible total requis pour créer la **distribution de charge** et son champ électrique associé.

Cas magnétostatique:

l'énergie magnétostatique totale U_B d'une distribution de courant isolée est le travail réversible total requis pour créer la **distribution de courant** et son champ magnétique associé.

Nous pouvons démontrer que:

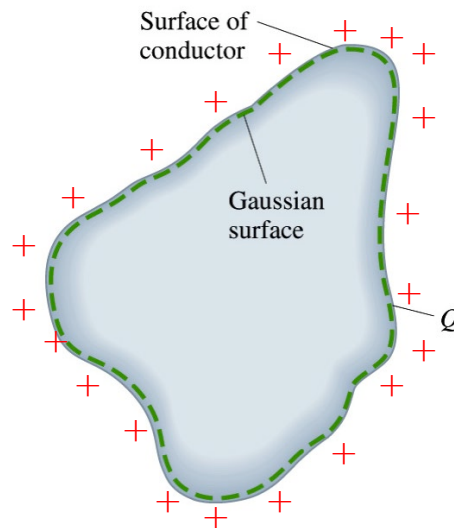
Dans le vide:

$U_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E} ^2 dV$	U_E : énergie électrostatique totale	$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E} ^2$	u_E : densité d'énergie électrostatique
$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B} ^2 dV$	U_B : énergie magnétostatique totale	$u_B = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} ^2$	u_B : densité d'énergie magnétostatique

En présence d'un matériau linéaire:

$U_E = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$	U_E : énergie électrostatique totale	$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$	u_E : densité d'énergie électrostatique
$U_B = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$	U_B : énergie magnétostatique totale	$u_B = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$	u_B : densité d'énergie magnétostatique

Inductance et capacité

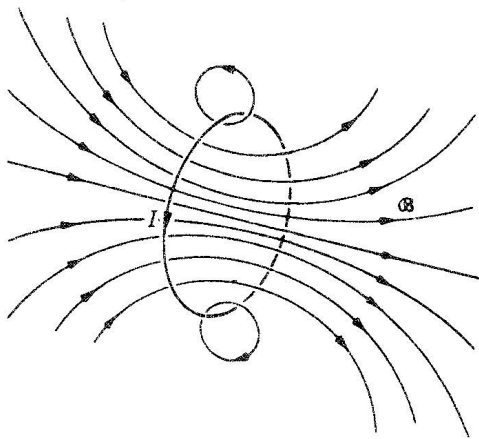


Capacité (auto-capacité):

$$C \triangleq \frac{Q}{V}$$

$$[C] = C/V = F = \text{Farad}$$

La capacité d'un conducteur est la charge totale sur le conducteur lorsqu'il est maintenu à un potentiel de 1 V (avec tous les autres conducteurs étant maintenus à un potentiel nul).



Inductance (auto-inductance):

$$L \triangleq \frac{\Phi_B}{I}$$

$$[L] = Tm^2/A = H = \text{Henry}$$

L'inductance L d'un circuit électrique est définie comme le rapport entre le flux du champ magnétique embrassé par le circuit et le courant.
(le flux est celui produit par le courant I parcourant le circuit et non celui provenant d'une autre source (autre courant, aimant, etc.))

Note:

Deux définitions courantes d'inductance:

1) L'inductance L du circuit électrique est le rapport entre le flux du champ magnétique embrassé par le circuit et le courant:

$$L \triangleq \frac{\Phi_B}{I}$$

(le flux est celui produit par le courant I parcourant le circuit et non celui provenant d'une autre source (autre courant, aimant, etc.))

Cette définition présente deux «inconvenients» :

- a) Le flux est une grandeur physique difficile à mesurer directement. La «surface circonscrite par le circuit» n'est pas toujours facile à déterminer et, dans certains cas, elle n'existe même pas (par exemple si le circuit «fait un nœud»).
- b) La définition suppose que le flux est proportionnel à l'intensité du courant. Ce n'est pas le cas quand le flux traverse un matériau magnétique non-linéaire.

2) La fem auto-induite d'un circuit électronique est proportionnelle à la vitesse de variation temporelle du courant I dans le circuit. Le paramètre reliant la fem à la variation du courant est défini comme inductance (ou auto-inductance). (voir plus tard dans le chapitre «Electrodynamique»)

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

Celle-ci ne présente que le inconvenient b).

La matrice de capacité et la matrice de inductance

La **matrice de capacité** **C** décrit comment un ensemble de conducteurs chargés s'influencent **électriquement**.

La matrice de capacité (qui doit être mesurée ou calculée) relie la charge Q_i sur le conducteur i au potentiel V_j du conducteur j pour un ensemble de N conducteurs:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j$$

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} V_i V_j$$

$C_{ii} = C_i$: capacité (capacité propre)

C_{ij} avec $i \neq j$: capacité mutuelle

La capacité d'un conducteur i (i.e., C_{ii}) est donc la charge totale du conducteur lorsqu'il est maintenu au potentiel de l'unité (i.e., $V_i = 1$ V), et tous les autres conducteurs étant maintenus à un potentiel nul (i.e., $V_j = 0$ pour $j \neq i$).

La **matrice de inductance** **M** décrit comment un ensemble de circuits porteurs de courant s'influencent **magnétiquement**.

La matrice de inductance (qui doit être mesurée ou calculée) relie le flux magnétique $\Phi_{B,i}$ à travers le circuit i au courant I_j dans le circuit j :

$$\Phi_{B,i} = \sum_{j=1}^N M_{ij} I_j$$

$$U_B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_{B,i} I_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} I_i I_j$$

$M_{ii} = L_i$: inductance (inductance propre)

M_{ij} avec $i \neq j$: inductance mutuelle

Note:

On peut aussi montrer que:

$$C_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{V_i V_j} \int_{V_i} dV \int_{V_j} dV' \frac{\rho_i(\mathbf{r}) \rho_j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad C_{ii} = C_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{V_i^2} \int_{V_i} dV \int_{V_i} dV' \frac{\rho_i(\mathbf{r}) \rho_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$C_{ii} = C_i$: capacité (capacité propre)

C_{ij} avec $i \neq j$: capacité mutuelle

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{I_i I_j} \int_{V_i} dV \int_{V_j} dV' \frac{\mathbf{J}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad M_{ii} = L_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{I_i^2} \int_{V_i} dV \int_{V_i} dV' \frac{\mathbf{J}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$M_{ii} = L_i$: inductance (inductance propre)

M_{ij} avec $i \neq j$: inductance mutuelle

Inductance propre et capacité propre: définition plus générale



Pour faibles fréquences et faible pertes par radiation (sans démonstration) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$L = \frac{1}{|I|^2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{2}{|I|^2} U_B$$

$$U_B = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} L |I|^2 \quad \text{Energie stockée dans une inductance } L \text{ avec courant } I$$

$$C = \frac{1}{|V|^2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV = \frac{2}{|V|^2} U_E$$

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV = \frac{1}{2} C |V|^2 \quad \text{Energie stockée dans une capacité } C \text{ avec tension } V$$

Pour matériau linéaire: $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

$\Rightarrow$

$$L = \frac{1}{|I|^2} \int_V \frac{1}{\mu} B^2 dV = \int_V \frac{1}{\mu} B_u^2 dV$$

Champ magnétique «unitaire»
(i.e., créé par un courant $I=1$ A)

$$C = \frac{1}{|V|^2} \int_V \varepsilon E^2 dV = \int_V \varepsilon E_u^2 dV$$

Champ électrique «unitaire»
(i.e., créé par une voltage $V=1$ V)

Démonstration:

Conservation de l'énergie (voir J 264 et diapositives "Electrodynamique"):

$$\frac{1}{2} I_i^* V_i = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E} dV + 2i\omega \int_V (w_m - w_e) dV + \oint_{S-S_i} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da \quad \text{Impédance: } Z \triangleq \frac{V_i}{I_i} \quad Z = R + jX$$

$$R = \text{Re} \left[\frac{V_i}{I_i} \right] = \frac{1}{|I_i|^2} \left\{ \text{Re} \left[\int_V \mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E} dV \right] + 4\omega \text{Im} \left[\int_V (w_m - w_e) dV \right] + 2 \oint_{S-S_i} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da \right\}$$

$$X = \text{Im} \left[\frac{V_i}{I_i} \right] = \frac{1}{|I_i|^2} \left\{ -\text{Im} \left[\int_V \mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E} dV \right] + 4\omega \text{Re} \left[\int_V (w_m - w_e) dV \right] \right\}$$

Pour faibles fréquences et faible pertes par radiation $\Rightarrow$

$$R \cong \frac{1}{|I_i|^2} \text{Re} \left[\int_V \mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E} dV \right]$$

$$\omega L = \frac{4\omega}{|I_i|^2} \int_V w_m dV$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{4\omega}{|I_i|^2} \int_V w_e dV$$

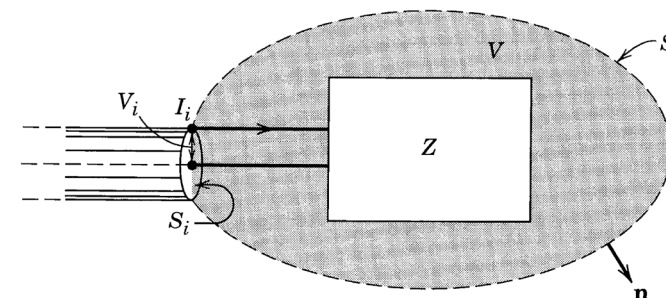
$$\Rightarrow L = \frac{1}{|I_i|^2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* dV$$

$$C = \frac{1}{|V_i|^2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* dV$$

Pour matériau linéaire: $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{|I_i|^2} \int_V \frac{1}{\mu} B^2 dV = \int_V \frac{1}{\mu} B_u^2 dV$$

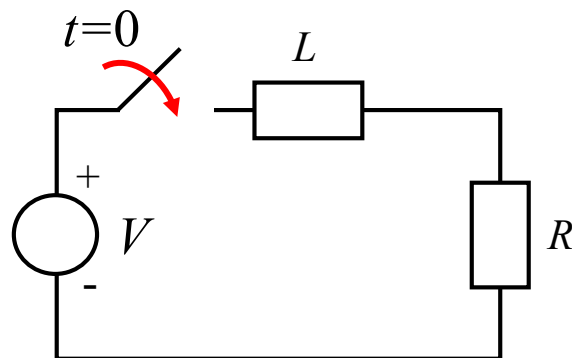
$$C = \frac{1}{|V_i|^2} \int_V \varepsilon E^2 dV = \int_V \varepsilon E_u^2 dV$$



$$u_{EM} \triangleq (1/2)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

$$w_{EM} \triangleq (1/4)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*)$$

Energie dans une inductance....



$$V = L \frac{dI}{dt} + RI$$

$$VI = LI \frac{dI}{dt} + RI^2$$

Note:

$$V + \varepsilon = RI \quad \text{et} \quad \varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = L \frac{dI}{dt} + RI$$

$VI = P_G$ Puissance électrique fournie par le générateur:

$$P_G = LI \frac{dI}{dt} + RI^2 = P_L + P_R$$

$$P_L = LI \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right)$$

$$I = \frac{V}{R} (1 - e^{-(R/L)t})$$

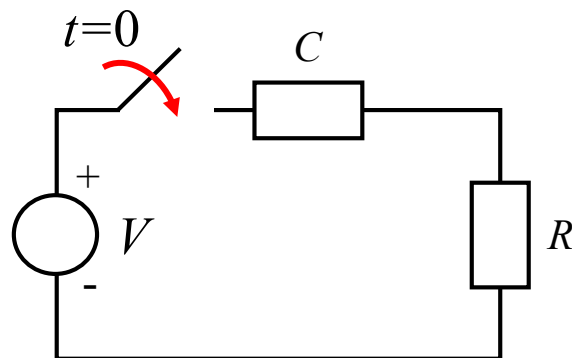
Energie stockée dans
l'inductance L à la fin
de la phase de «charge»
(i.e., avec un courant constant)

$$P_L = \frac{1}{2} L \frac{d}{dt} I^2$$

$$U_{B,\infty} = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty \frac{1}{2} L \frac{d}{dt} I^2 dt = \frac{1}{2} L \int_0^\infty \frac{d}{dt} I^2 dt = \frac{1}{2} L [I^2]_0^\infty = \frac{1}{2} LI_\infty^2 = LI_{L,\infty}^2$$

$$\Rightarrow U_{B,\infty} = \frac{1}{2} LI_{L,\infty}^2 \quad I_{L,\infty} = \frac{V}{R}$$

Energie dans un condensateur....



$$V = RI + V_C = RC \frac{dV_C}{dt} + V_C$$

$$VI = P_G \quad \text{Puissance électrique fournie par le générateur}$$

$$P_G = RI^2 + V_C I = P_R + P_C$$

$$P_C = V_C I \quad I = \frac{V}{R} (e^{-(1/RC)t})$$

$$V_C = V(1 - e^{-(1/RC)t})$$

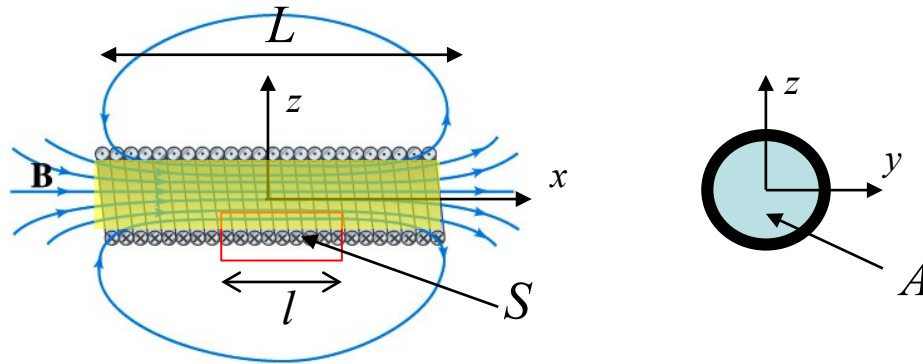
$$P_C = \frac{V^2}{R} (e^{-(1/RC)t} - e^{-(2/RC)t})$$

$$U_{E,\infty} = \int_0^\infty P_C dt = \int_0^\infty \frac{V^2}{R} (e^{-(1/RC)t} - e^{-(2/RC)t}) = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} CV_{C,\infty}^2$$

$$\Rightarrow U_{E,\infty} = \frac{1}{2} CV_{C,\infty}^2 \quad V_{C,\infty} = V$$

Energie stockée dans
dans le condensateur à la fin
de la phase de «charge»
(i.e., avec une tension constante)

Exercice: inductance d'un solénoïde infini (avec matériau magnétique linéaire)



Methode 1:

$$\text{Maxwell: } \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\text{Condition statiques: } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

Dans un matériau magnétique linéaire: $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$

$$\int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = InL$$

$\mathbf{B} \cong 0$ à l'extérieur du solénoïde; $\mathbf{B} \cong B\hat{\mathbf{x}}$ à l'intérieur du solénoïde

$\Rightarrow$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mu_r \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mu_r \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \mu_r InL$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \cong BL + 0 + 0 + 0 = BL$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 \mu_r In$$

$$\Rightarrow \Phi_B = NBA = N \mu_0 \mu_r InA = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r IA}{L}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r A}{L}$$

$n = (N/L)$ nombre de tours par unité de longueur

N = nombre de tours du solénoïde

Attention: A et S sont deux surfaces différentes.

Methode 2:

...de la methode 1:

$B \cong \mu_0 \mu_r In$ à l'intérieur du solénoïde

$B \cong 0$ à l'extérieur du solénoïde

$\Rightarrow$

$$L = \frac{1}{|I|^2} \int_V \frac{1}{\mu} B^2 dV \cong \frac{1}{|I|^2} \int_{V_{\text{solenoid}}} \frac{1}{\mu} B^2 dV \cong \frac{1}{|I|^2} \frac{1}{\mu} B^2 \int_{V_{\text{solenoid}}} dV \cong \frac{1}{|I|^2} \frac{1}{\mu} B^2 AL = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r A}{L}$$

Methode 3 (voir plus tard dans le chapitre "Electrodynamique"):

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} N \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad \varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s}$$

$\mathbf{H} \cong 0$ à l'extérieur du solénoïde; $\mathbf{H} \cong B\hat{\mathbf{x}}$ à l'intérieur du solénoïde

$\Rightarrow$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Hl \quad \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = nIl$$

$\Rightarrow$

$$H = nI$$

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} N \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} N \int_A \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = -\mu_0 \mu_r NAn \frac{dI}{dt}$$

$\Rightarrow$

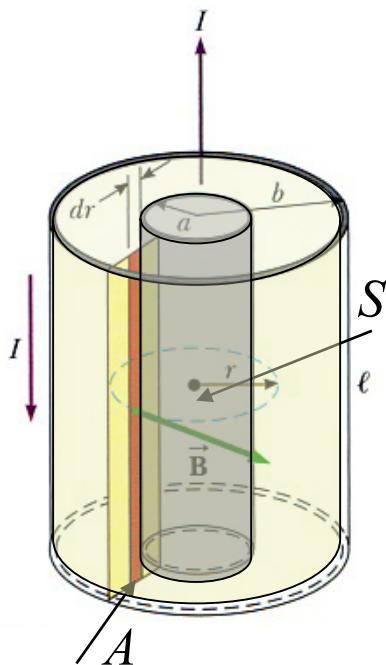
$$L = \mu_0 \mu_r NAn = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 A}{L} = \mu_0 \mu_r n^2 V$$

Exercice: inductance d'un câble coaxial infini (avec matériau magnétique linéaire)

L : Inductance d'une portion de longueur l du câble coaxial

Attention:

- 1) nous supposons que le courant à l'intérieur des conducteurs est nul (hypothèse raisonnable aux hautes fréquences où la «skin depth» est petite par rapport à a).
- 2) A et S sont deux surfaces différentes.



Methode 1:

$$\text{Maxwell: } \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\text{Condition statique: } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

$$\mathbf{H} = H(r) \hat{\mathbf{u}}_\phi \quad \text{entre les deux conducteurs}$$

$$\text{Dans un matériau magnétique linéaire: } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

$$\Rightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H 2\pi r = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = I$$

$$\Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \quad \text{Flux «efficace»?}$$

$$\Rightarrow \Phi_B = \oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_A \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I \int_a^b \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi r} l dr = I \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Methode 2:

...de la methode 1:

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \quad \text{entre les deux conducteurs}$$

$$B \cong 0 \quad \text{partout ailleurs}$$

$\Rightarrow$

$$L = \frac{1}{|I|^2} \int_V \frac{1}{\mu} B^2 dV \cong$$

$$\cong \frac{1}{|I|^2} \int_{V_{\text{entre les deux conducteurs}}} \frac{1}{\mu} B^2 dV \cong \frac{\mu_0 \mu_r}{(2\pi)^2} \int_a^b \frac{1}{r^2} I^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 \mu_r I^2 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Methode 3 (voir plus tard dans le chapitre "Electrodynamique"):

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad \varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{H} = H(r) \hat{\mathbf{u}}_\phi \quad \text{entre les deux conducteurs}$$

$$\Rightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H 2\pi r = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} = I \quad \text{Flux «efficace»?}$$

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dI}{dt} \int_a^b \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi r} l dr = -\frac{dI}{dt} \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow -\frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Multipôles magnétiques

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV$$

pour $r \gg r'$ et $r \gg R$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} - \dots$$

$\Rightarrow$

$k = x, y, z$

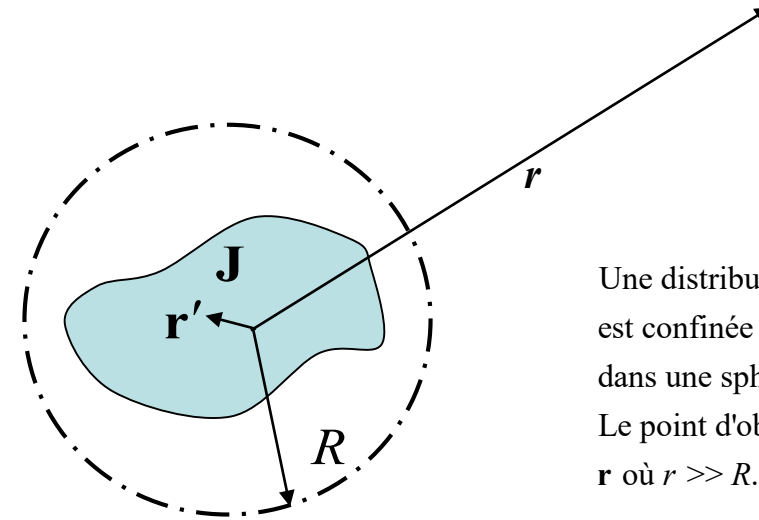
$$A_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \int_V J_k(\mathbf{r}') dV + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V J_k(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV + \dots \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \int_V J_k(\mathbf{r}') dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV + \dots \right)$$

avec

$$\frac{1}{r} \int_V J_k(\mathbf{r}') dV = 0$$

$$\mathbf{m} \triangleq \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV$$

Pour démonstration
voir Z 336



Une distribution de courants localisée
est confinée entièrement
dans une sphère de rayon R .
Le point d'observation est
 $\mathbf{r}$ où $r \gg R$.

Moment de monopole magnétique (monopole magnétique)

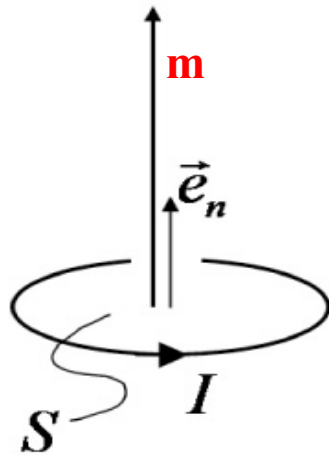
Moment de dipole magnétique (dipole magnétique)

Le dipôle magnétique

$$\mathbf{m} \triangleq \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) dV$$

$\mathbf{m}$: moment de dipôle magnétique (dipôle magnétique)

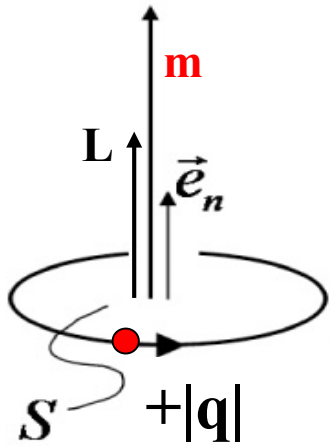
Exemple 1. Circuit électrique circulaire avec courant I :



$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} = \frac{1}{2} I \hat{\mathbf{e}}_n \oint_C r d\mathbf{l} = \frac{1}{2} I \hat{\mathbf{e}}_n r \oint_C d\mathbf{l} \\ &= \frac{1}{2} I r 2\pi r \hat{\mathbf{e}}_n = IS \hat{\mathbf{e}}_n \quad [\text{A m}^2] \end{aligned}$$

Exemple 2. Particule chargée avec masse m_p en orbite circulaire:

Moment magnétique en fonction du courant equiv. et en fonction du moment angulaire:



Le courant equivalent est:

$$I = q \frac{1}{T} = q \frac{v}{2\pi R} = q \frac{\omega}{2\pi}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{m} = IS\hat{\mathbf{e}}_n = q \frac{v}{2} R \hat{\mathbf{e}}_n = q \frac{\omega}{2\pi} S \hat{\mathbf{e}}_n$$

Le moment angulaire est:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m_p \mathbf{v}) = R m_p v \hat{\mathbf{e}}_n = m_p \omega R^2 \hat{\mathbf{e}}_n$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{m} = q \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{L}}{m_p R^2} S = \frac{q}{2m_p} \mathbf{L}$$

$\mathbf{m}$: moment de dipôle magnétique (dipôle magnétique)

Note: Nous pouvons appeler ce moment de dipole magnétique de la particule le moment de dipole magnétique “orbital” de la particule, pour le distinguer du moment de dipole magnétique intrinsèque ou spin que possèdent certaines particules (electrons, noyaux, ..)

Force, couple, énergie potentielle pour un dipôle magnétique dans un champ $\mathbf{B}$

Calculons la force (et le couple) exercée sur une distribution de courants $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ par un champ électrique externe $\mathbf{B}(\mathbf{r}')$ qui change "lentement" dans l'espace. Lentement signifie que le champ magnétique est bien approximé par une expansion de la série de Taylor à deux termes autour d'un point de référence $\mathbf{r}$ situé dans la distribution de courants:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}') = \mathbf{B}(\mathbf{r}) + [(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \nabla] \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \dots$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') dV$$

$$\mathbf{N} = \int_V (\mathbf{r}' \times (\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')) dV$$

$\Rightarrow$ (sans démonstration)

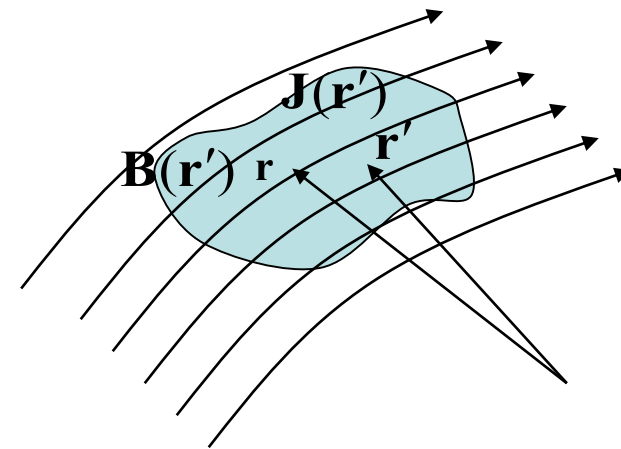
$$\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

Valable si $\mathbf{m}$ est un vecteur "constant"

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Couple par rapport au centre du dipole (i.e., pour $\mathbf{r}=0$)

$$U_B = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$



Note 1:

En général: $\mathbf{F} = m_k \nabla B_k$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad \text{si } \mathbf{m} \text{ est un vecteur constant (i.e., } \frac{\partial}{\partial k} m_j = 0 \quad \forall k, j = x, y, z)$$

$$\text{Dem.: } m_k \nabla B_k = \sum_{k=x,y,z} m_k \nabla B_k = \dots\dots$$

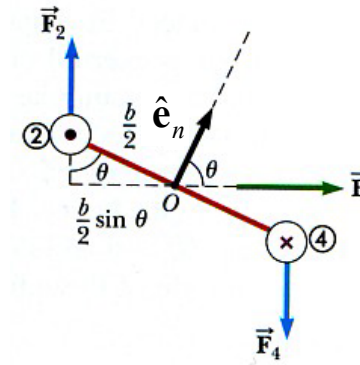
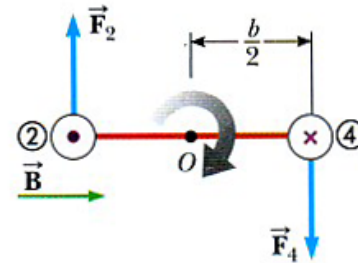
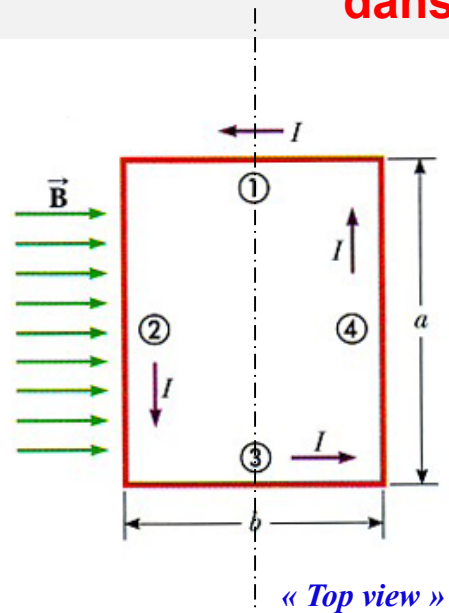
$$\Rightarrow \mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad \text{si } \mathbf{m} \text{ est un vecteur constant et } \nabla \times \mathbf{B} = 0$$

$$\text{Dem.: Math.: } (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = -\mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{m}) + \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{m} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

donc en general $m_k \nabla B_k \neq \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \neq (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$

Note 2: En général: $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad \text{si } \mathbf{r} = 0$

Exercice: Force et couple sur un circuit dans un champ magnétique uniforme



$$\vec{F}_i = I \vec{L}_i \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_4 = IaB ; \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 0$$

$$\vec{N}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad N = bIaB \sin \theta = ISB \sin \theta ; \quad \vec{S} = ab \hat{e}_n = S \hat{e}_n$$

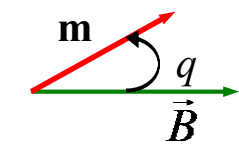
$$\Rightarrow$$

$$\vec{N} = I \vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Couple sur un circuit (de forme et orientation quelconque)

$$\vec{m} \triangleq I \vec{S}$$

«Dipôle magnétique» du circuit



$$d\theta > 0 \rightarrow dW < 0$$

$$dW = -N d\theta = -|\vec{m}| B \sin \theta d\theta = -dU_B$$

$$U_B = -|\vec{m}| B \cos \theta = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Energie potentielle magnétique

Exercice: Couple sur une boucle circulaire dans un champ magnétique uniforme

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$d\mathbf{N} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

donc si $\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{r}}$ et $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{B}}$

$\Rightarrow$

$$d\mathbf{N} = IRB\hat{\mathbf{r}} \times (d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{B}})$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{N} = \int_0^{2\pi} d\mathbf{N} d\varphi = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}$$

$$d\mathbf{l} = -R d\varphi \sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + R d\varphi \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}$$

$$d\hat{\mathbf{l}} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \sin \theta \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$$

$\Rightarrow$

$$d\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{B}} = \cos \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{y}} + (-\sin \varphi \sin \theta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \theta \cos \varphi) \hat{\mathbf{z}}$$

$\Rightarrow$

$$\hat{\mathbf{r}} \times (d\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{B}}) = \sin \varphi (-\sin \varphi \sin \theta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \theta \cos \varphi) \hat{\mathbf{x}} - \cos \varphi (-\sin \varphi \sin \theta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \theta \cos \varphi) \hat{\mathbf{y}}$$

$\Rightarrow$

$$d\mathbf{N} = IR^2 B \hat{\mathbf{r}} \times (d\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{B}}) = IR^2 B d\varphi \begin{bmatrix} \sin \varphi (-\sin \varphi \sin \theta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \theta \cos \varphi) \hat{\mathbf{x}} \\ -\cos \varphi (-\sin \varphi \sin \theta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \theta \cos \varphi) \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{N} = \int_0^{2\pi} d\mathbf{N} d\varphi = I\pi R^2 B (-\sin \theta \sin \alpha \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \cos \alpha \hat{\mathbf{y}}) =$$

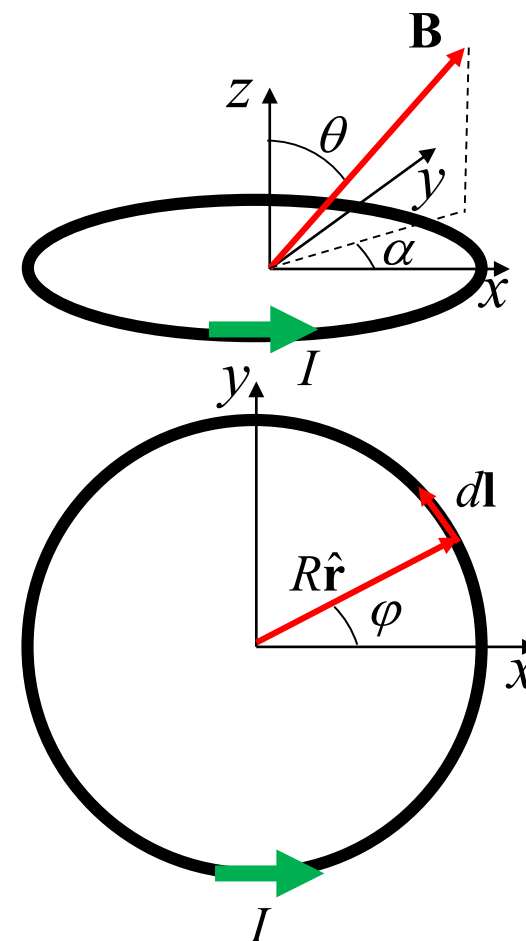
$$= mB (-\sin \theta \sin \alpha \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \cos \alpha \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0$$

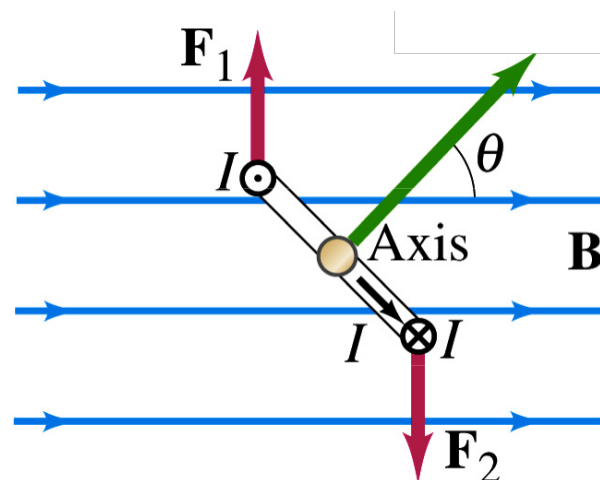
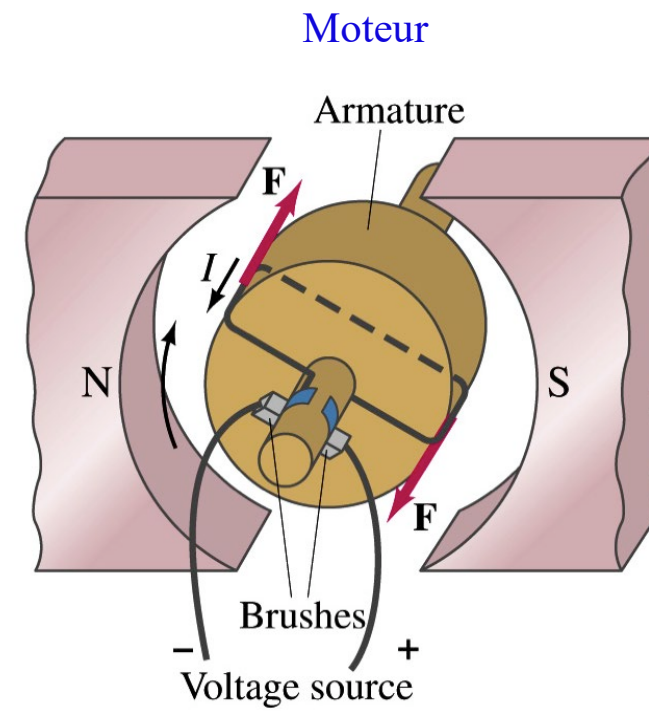
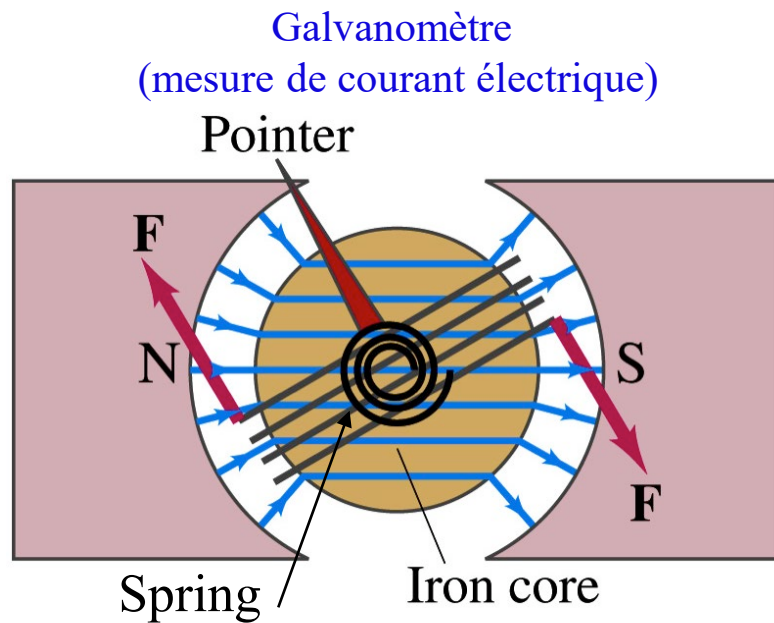
$$\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}} = I\pi R^2 \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = B(\sin \theta \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} = \frac{1}{2} I \hat{\mathbf{z}} \oint_C R d\varphi = \frac{1}{2} I \hat{\mathbf{z}} R \oint_C d\varphi \\ &= \frac{1}{2} I R 2\pi R \hat{\mathbf{z}} = I\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

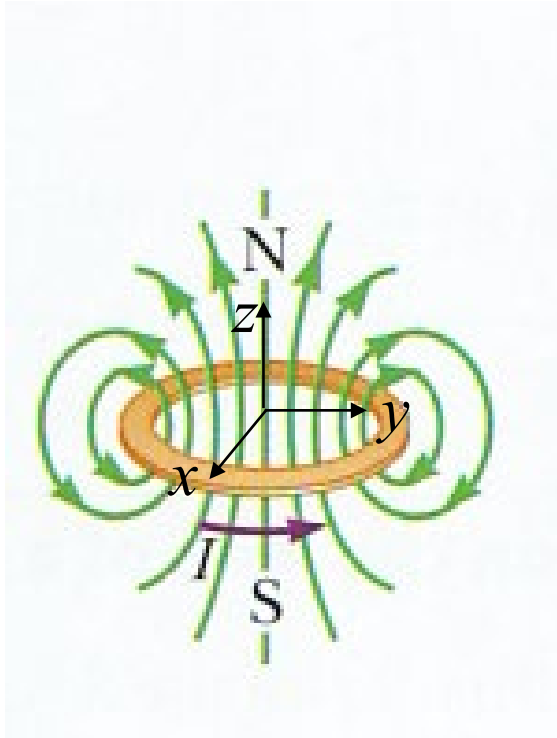


Exemples d'applications «du couple sur un boucle»



Principe d'équivalence d'Ampère

entre un aimant permanent et une boucle de courant

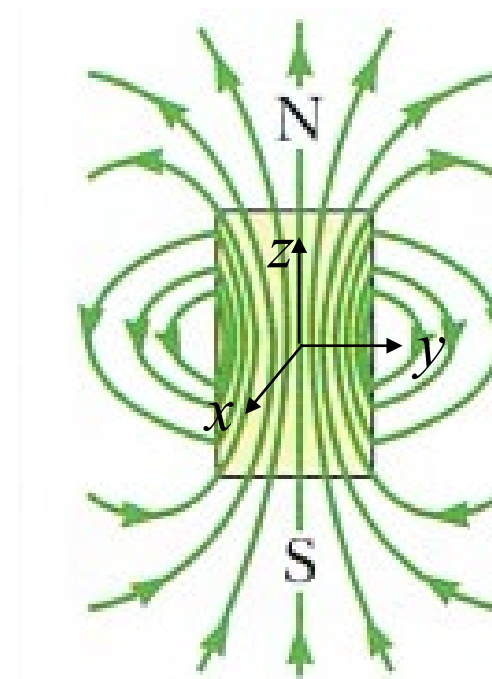


$$\mathbf{m} = I\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} = IA\hat{\mathbf{z}} \quad [\text{Am}^2]$$

R : rayon de la boucle [m]

I : courant [A]

A : surface de la boucle [m^2]



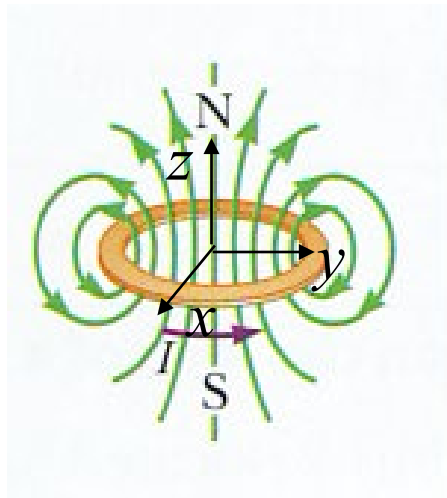
$$\mathbf{m} = MV\hat{\mathbf{z}} \quad [\text{Am}^2]$$

$\mathbf{M}$: aimantation de l'aimant [A/m]
(densité de dipôle magnétiques)

V : volume de l'aimant [m^3]

S'ils ont le même moment magnétique $\mathbf{m}$:

1. Même comportement dans un champ magnétique extérieur (rotation, déplacement)
2. Même champ $\mathbf{B}$ créé à grand distance



$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl$$

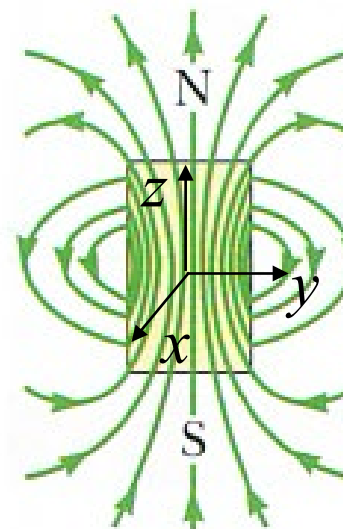
Solution analytique pour $\mathbf{B}(0,0,z)$ avec loi de Biot-Savart :

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

donc pour $|z| \gg R$:

$$\mathbf{B}(0,0,z) \cong \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{m} = I\pi R^2 \hat{\mathbf{z}}$$



Pour $|\mathbf{x}| \gg$ dimensions de l'aimant, voir Z 338 :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3}$$

donc pour $\mathbf{m}=(0,0,m)$ et $\mathbf{x}=(0,0,z)$:

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{z^3} \hat{\mathbf{z}}$$